کاربرد مدل‌های خطی ساده در برنامه‌ریزی شهری

دکتر احمد پوراحمد

استاد دانشکده جغرافیای دانشگاه تهران

محمد کمیلی

عضو هیأت علمی جهاد دانشگاهی

دانشجوی دکتری برنامه‌ریزی شهری

چکیده

تا کنون یک کاربرد عمده روش‌های علمی، برآورد و پیش‌گویی ارزش‌های یک متغیر با مراجعه به ارزش‌های یک یا چند متغیر دیگر همراه آن بوده است. در این مقاله، متداول‌ترین نوع «هم پیوستگی» (Correlative)، یا برآورد بر اساس روابط ساختاری بین متغیرها را که به ایجاد مدل خطی ساده می‌رسد، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

استفاده از مدل‌های خطی (Liner model) در انواع تجزیه و تحلیل‌های شهری به سبب سادگی نسبی و دقت این مدل‌ها کاملاً متداول و مقبول است. مدل‌های خطی گرایش‌هایی را معمولاً در طول زمان، نشان می‌دهند که ممکن است از طریق تجزیه و تحلیل‌های فراستی یا نموداری مورد توجه قرار نگیرند. مدل‌های خطی برای بیان رویدادها، هنگامی که روش‌های غیرعلمی نابسنده و نارضایت‌بخش‌اند مورد استفاده قرار می‌گیرند (و ظاهر و زمان رویدادها را پیش‌گویی می‌کنند).

واژه‌های کلیدی: مدل خطی، برنامه ریزی شهری، پیش‌گویی.

مقدمه

علی‌رغم بحث و جدل‌های فلسفی اخیر، معدودی از دانشمندان و تحلیل گران همچنان معتقدند که جهان حقیقی خطی است، با این همه کاربرد مدل‌های خطی در تجزیه و تحلیل شهری، به سبب سادگی و جامعیت درونی این مدل‌ها، مزیتی دارد که دانشمندان و تحلیل‌گران را به خود جلب می‌کند. بحث می‌شود که چون دانش ما از جهان و سیستم‌های شهری کامل نیست، مدل‌های ساده خطی پیشگوهایی جذاب ولی متغیرهایی غیرکامل هستند.

در تجزیه و تحلیل‌های شهری اغلب سه گونه مدل‌های خطی مورد استفاده قرار می‌گیرند. ۱) گرایشی ۲) رابطه‌ای و ۳) بیانی. روابط را می‌توان با استفاده از تئوری «هم پیوستگی» در پیوند با مدل‌های خطی، تعیین کرد. مدل‌های خطی ساده ارزش‌ها یا مقادیر یک متغیر را از طریق همراهی «هم پیوند»های تبعی این متغیر با یک متغیر دیگر که بتوان یک یا صفر رسیده باشد پیش گویی می‌کنند.

تاریخچه برنامه‌ریزی خطی

مسئله حل یک سیستم نامساوی خطی به زمان فوریه (Fourier) برمی‌گردد. برنامه‌ریزی خطی به عنوان یک مدل ریاضی به وجود آمد و در زمان جنگ جهانی دوم و پس از آن معلوم شد که طرح‌ریزی و هم آهنگی پروژه‌های مختلف و استفاده مؤثر از منابع کمیاب یک ضرورت است.

تیم SCOOP (محاسبات علمی برنامه‌های بهینه) نیروی هوایی ایالات متحده کار جدّی خود را در ژوئن ۱۹۴۷ شروع کرد. ماحصل آن، ابداع روش سیمپلکس توسط جورج.بی. دانتزیک (Dantzig George B) در پایان تابستان ۱۹۴۷ بود. برنامه‌ریزی خطی به سرعت مورد توجه اقتصاد دانان، ریاضی دانان، آماردانان، و مؤسسات دولتی قرار گرفت. در تابستان ۱۹۴۹ کنفرانسی با مسئولیت کمیته Cowles برای تحقیق در اقتصاد برگزار شد. مقالات ارائه شده در این کنفرانس اندکی بعد در سال ۱۹۵۱ به همت T.C.Koopmans در کتابی تحت عنوان تحلیل فعالیت تولید و تخصیص جمع آوری شد. جان وان نیومن (John Von Neumann) در همان سال تئوری دوگانگی را توسعه داد و لئونید خاشیان (Leonid Kantorovich) ریاضی دان روسی از تکنیک‌های ساده در اقتصاد قبل از دانتزیک استفاده کرد و جایزه نوبل را در سال ۱۹۷۵ در اقتصاد برد.

مثال اصلی دانتزیک یافتن بهترین تخصیص ۷۰ نفر به ۷۰ شغل بود و هنوز موفقیت او را نشان می‌دهد. برای محاسبه احتیاج به نمایش همه‌ی جایگشت‌ها برای انتخاب بهترین تخصیص بسیار وسیع و غیرممکن است. او مشاهده کرد با استفاده از الگوریتم سیمپلکس یافتن بهترین جواب فقط چند لحظه طول می‌کشد و همچنین متوجه شد که جواب در گوشه چند ضلعی که به وسیله قیدهای مسأله تشکیل می‌شود وجود دارد.

معرفی مدل

در ریاضیات، مسائل برنامه‌ریزی خطی شامل بهینه‌سازی تابع هدفی خطی است که بایستی یکسری محدودیت در فرم‌های تساوی‌های خطی و نامساوی برقرار شوند. به طور خیلی غیررسمی برنامه‌ریزی خطی استفاده از مدل ریاضی خطی برای بدست آوردن بهترین خروجی (به طور مثال حداکثر سود، حداقل کار) با توجه به شرط‌های داده شده (برای مثال فقط ۳۰ ساعت کار در هفته، کار غیرقانونی انجام ندادن و غیره) است.

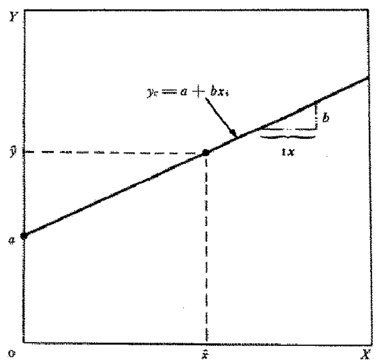
و به طور رسمی‌تر در یک چند سقفی (مانند چندضلعی یا چند وجهی) که تابعی با مقدار حقیقی بر روی آن تعریف شده است، هدف یافتن نقطه‌ای در این سقفی است که تابع هدف بیشترین یا کمترین مقدار را دارا باشد. این نقاط ممکن است موجود نباشد، اما اگر وجود داشته باشند جست و جو در میان رئوس چند ضلعی یافتن حداقل یکی از آن‌ها را تضمین می‌کند.

برنامه ریزی خطی به صورت استاندارد می‌توانند نمایش داده شوند:

Maximize cTx; Subject to Ax b ;x 0

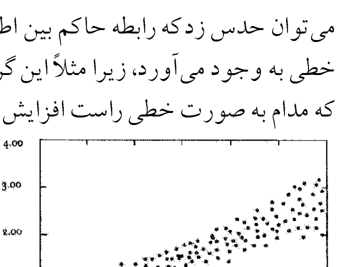
X بیانگر بردار متغیرها می‌باشد و همچنین c و b بردار ضرایب و A ماتریس ضرایب. عبارتی که باید حداکثر یا حداقل شود تابع هدف نام دارد (در این مورد CTX). عبارت Ax b شرایطی هستند که یک چند وجهی محدب را نمایش می‌دهند که تابع هدف روی آن باید بهینه شود. مدل‌های

خطی ساده اغلب خطوط گرایش، خط مستقیم پیش افکنی‌ها یا خطوط پس روی نامیده می‌شوند. یک مدل ساده خطی شکل ریاضی یک خط ساده را می‌یابد که عبارت است از: $Y=a+bX$ یا به منظور برآورد و پیش گویی $y_c=a+bx_i$ که در آن y_c نماینده yهای برآورد یا پیش گویی شده است. اگر یک مدل ساده خطی که معادله آن را در فوق نشان دادیم ترسیم کنیم به شکل آشنای یک خط مستقیم، چنان‌که در نگاره ۱ مصور شده در می‌آید.



نگاره ۱: رسم یک مدل خطی ساده

در عمل یک راه خوب برای تحلیل‌گر، آزمایش مشاهدات از طریق رسم نمودار آنهاست. نشان دادن مشاهدات یک متغیر برای مقایسه آن با مشاهدات متغیری دیگر «نمودار پراکندگی» نامیده می‌شود. فی‌المثل، نموداری راکه در نگاره ۲ مصور شده در نظر بگیرید، این «نمودار پراکندگی» (Scattergram) همبستگی بین هزینه رفت و آمد به محل کار و فاصله تا محل کار را چنان که در ایالات متحده مشاهده شده است نشان می‌دهد و توسط مرکز پژوهشی دانشگاه میشیگان (Survey research center,university (of Michigan تهیه شده است. تنها با مشاهده، می‌توان حدس زد که رابطه حاکم بین اطلاعات حاصل از یک مشاهده،مدلی خطی به وجود می‌آورد، زیرا مثلاً این گروه اطلاعات از شیبی تبعیت می‌کند که مدام به صورت خطی راست افزایش می‌یابد.



نگاره ۲: فاصله تا محل کار برحسب مایل

اگر مشاهدات، شبیه چنین الگویی نباشند ممکن است معنایش این باشد که به مدل‌های غیرخطی نیاز داریم یا این که اطلاعات بدست آمده چندان نامنظم‌اند که به شکل هیچ مدلی در نمی‌آیند. در مواردی خاص، مشاهده اطلاعات بدست آمده، ممکن است نشان دهد که منحنی‌های غیرخطی تقریباً به گرایش مجموعه نقاط نزدیک‌اند،اما روش‌هایی موجودند که به مدد آنها می‌توان به این موارد نیز، مدل‌های خطی را مورد استفاده قرار داد. مثلاً اگر مشاهده کنیم که مجموعه نقاط بدست آمده از اطلاعات حاصل شبیه یک تابع درجه دوم مانند $Y=X^2$ است می‌توانیم با استفاده از لگاریتم یک رابطه خطی بین x,y بوجود آوریم: مانند $Y=2\log X$. این عمل را ترادیس (transformation) می‌نامند.

مدل‌های چند متغیره

یکی از ویژگی‌های خاص مدل‌های خطی این است که این مدلها نه تنها روابط میان دو متغیر را تشریح می‌کنند، بلکه قادر به توضیح روابط میان چند متغیر هم هستند. اگر تصور شود که دو عامل یا بیشتر بر متغیر وابسته اثر می‌گذارد، برای سنجش میزان تأثیر هر عامل در رابطه با دیگر عوامل باید مدل ساده دو متغیره‌ای ساخته شود.

$$y=a+bx_1+cx_2+dx_3$$

y تعداد سفر هر خانوار، x_1 تعداد افراد هر خانوار، x_2 تعداد شاغلین هر خانوار، x_3 تعداد اتومبیل‌های هر خانوار می‌باشد. a و b و c و d ثابت‌های عددی هستند که مقدار تغییرات متغیر وابسته yرا در رابطه با تغییرات متغیرهای مستقل تعیین می‌کند. برای مثال، اگر مقادیر ثابت برابر $c=0.5$، $b=0.75$، $a=2$، $d=2$ باشند معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$y=2+0.75x_1+0.5x_2+2x_3$$

اگر بخواهیم Y یا تعداد سفرها برای یک خانوار چهار نفره (x_1=۴)، که همه آنها شاغل بوده (x_2=۴) و دارای دو اتومبیل می‌باشد (x_3=۲) را محاسبه کنیم، مدل معلوم می‌دارد که خانواده روزانه ۱۱ سفر انجام می‌دهد و محاسبات به صورت زیر می‌باشد:

$$y=2+0.75(4)+0.5(4)+2(2)=2+3+2+4=11$$

میزان استحکام روابط خطی

استحکام رابطه میان مقادیر واقعی و پیش بینی شده با ضریب هم بستگی (R) یا (coefficient of correlation) اندازه‌گیری می‌شود. اگر ضریب همبستگی صفر باشد رابطه خطی میان متغیرها وجود نخواهد داشت. یکی دیگر از ابزارهای اندازه‌گیری استحکام روابط خطی میان متغیرها، ضریب دترمینیشن است. این ضریب مجذور ضریب (R^2) است و نشان می‌دهد که $R^2 \times 100$ درصد تغییر متغیر وابسته در نتیجه تغییرات متغیر مستقل خواهد بود.

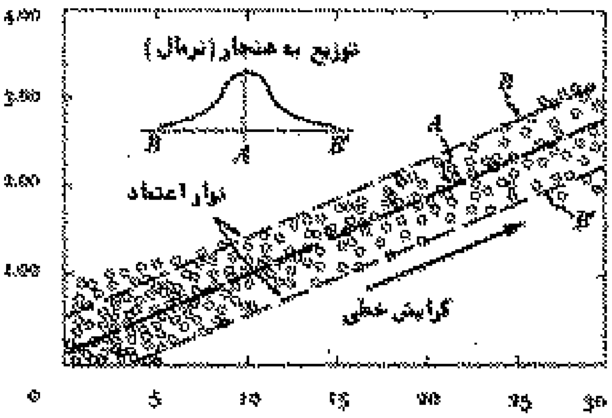
روش پژوهش

نخستین قدم در مناسب گردانیدن مدل‌های خطی، نمایش یک نمونه گویا یا نمایش منتخب ارقام مشاهده شده برای متغیرها به صورت نقطه است. نقاط نمایش داده شده سپس برای مشاهده گرایش‌های خطی در آنها مورد آزمایش قرار می‌گیرند و نیز این نقاط برای درک انواع مدل‌ها که معرف آنها می‌توانند باشند آزمایش می‌شوند، بدین ترتیب که به صورت نوارهایی درآورده می‌شوند که معمولاً اکثر نقاط را شامل می‌شوند.

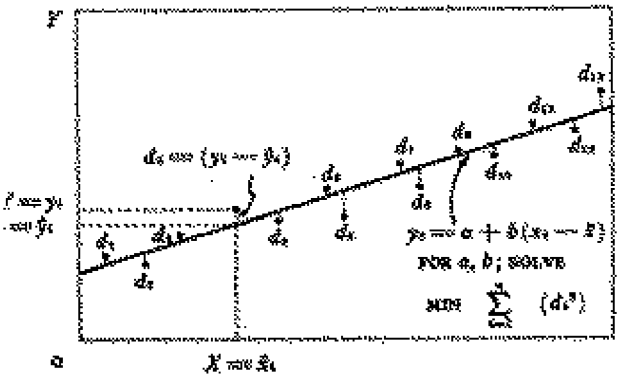
این نوارها باید فاصله‌شان از یکدیگر یکسان باشد تا خطی بودن مدل معلوم شود. سومین و آخرین آزمایش چشمی باید این باشد که آیا توزیع نقاط در دو جانب خط میانی نوارها هنگاری به نظر می‌رسد یا خیر، یعنی آیا

نقاط نماینده ارقام، توزیع‌شان در فاصله میان دو نوار به شکل زنگوله متقارن است یا نه؟

تحلیل‌گر، پس از آن‌که به دلایل مشهود و از طریق آزمایش قانع شد که ارقام و اطلاعات بدست آمده را می‌توان به صورت مدل خطی درآورد، می‌تواند مقادیر b,a را که پارامترهای (ویژگی‌های درونی) مدل نامیده می‌شوند حساب کند.



نگاره۳: آزمایش چشمی برای تعیین خطی بودن یک رابطه



نگاره۴: انحراف از مناسب‌ترین خط

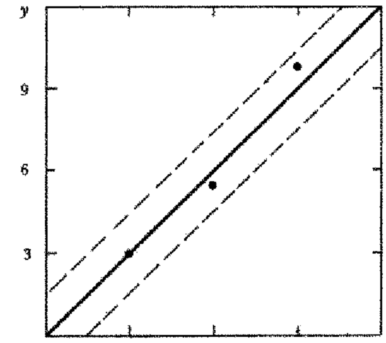
الگوریتمی که معمولاً بیش از همه در محاسبات کامپیوترهای شمارشگر مورد استفاده قرار می‌گیرد به مناسب‌ترین خط موسوم است، همچنان که در راه حل کمترین مربعات نیز این خط بدست می‌آید. این راه حل کمترین مربعات نام گرفته است زیرا که فاصله بین ارقام مشاهده شده و مقادیر برآورد شده معادل آنها را از یک خط پسروی به حداقل کاهش می‌دهد.

برای رسم تقریبی مجموعه‌ای از مشاهدات موجود تعداد بی‌شماری خطوط امکان دارد، اما تنها یک خط، مجموع مربعات، تفاوت‌های بین مقادیر مشاهده شده و مقادیر برآورد شده را به حداقل کاهش می‌دهد. نگاره ۴ این مفهوم را مصور می‌کند.

به ملاحظه سادگی محاسبه می‌توانیم به جای یک شکل آشنای معادلات خطی $y_c=a+bx_i$ آن را به شکل $y_c=a+b(x_i-\bar{x})$ (که در آن $\bar{x}$ نماینده مقدار متوسط x است) در نظر بگیریم. نتیجه این کار ساده گردانیدن تعبیر و بیشتر کردن دقت مناسب‌ترین خط از نظر ریاضی است.

روش بدست آوردن مدل متغیرها

برای بدست آوردن معدل متغیرها به شیوه معمول عمل می‌کنیم:



نگاره۵: تصویر مثال سه نقطه‌ای

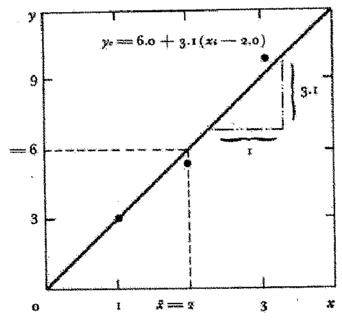
با استفاده از اصول کلاسیک علم «حساب»، می‌توان ثابت کرد که به حداقل رساندن d_i^2 با مجهول در نظر گرفتن b,a در معادلات زیر میسر است:

$$a=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})]}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

مثالی ساده ممکن است موضوع را روشن کند، مقادیر زیر را برای y_i,x_i در نظر بگیرید:

x_i	y_i
۱/۰	۳/۰
۲/۰	۵/۸
۳/۰	۹/۲



نگاره ۶: یک مثال سه نقطه‌ای در حالی که به مجهولات مقدار معین داده شده

جدول ۱: محاسبه یک مثال سه نقطه‌ای

	x_i	y_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$
	1.0	3.0	−1.0	1.0	−3.0	9.00	3.0
	2.0	5.8	0.0	0.0	−0.2	0.04	0.0
	3.0	9.2	1.0	1.0	3.2	10.24	3.2
$\sum_{i=1}^{3}$	6.0	18.0	0.0	2.0	0.0	19.28	6.2
	$\bar{x}=2.0$ and $\bar{y}=6.0$						

بنابراین:

$$a=\frac{I}{۳}\sum_{i=۱}^{۳}y_i=\frac{I}{۳}I۸.\cdot=۶.\cdot,$$

$$b=\frac{\sum_{i=۱}^{۳}[(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})]}{\sum_{i=۱}^{۳}(x_i-\bar{x})^۲}=\frac{۶.۲}{۲.\cdot}=۳.I;$$

پس: $y_c=۶/۰+۳/I(x_i-۲/۰)$

نگاه کنید به نگاره ۶

آزمایش مدل

اگـــر بــه مــثال مــفروض خــود کــه آن را بـا مــدل خــطی ســاده $y_c=۶/۰+۳/I(x_i-۲/۰)$ انطباق دادیم بازگردیم، می‌توانیم تفاوت بـین نـتایج مدل و ارقام مشاهده شده را امتحان کنیم. می‌توانیم x_i-y_c را (که در آن y_i یک مشاهده و y_c مقدار برآورد شده مطابق آن،چنان کـه از x_i پـیش گـویی شـده می‌باشد) محاسبه کنیم. ایـن تـفاوت بـه پس مـانده مـوسوم است و تـفاوت توضیح داده نشده بین مدل و نتایج مشاهده را نشان می‌دهد.

به آسانی از جدول ۱ برمی‌آید که مجموع پس مانده‌ها در مثال مفروض ما صفر است، فقط لغزش‌های ناشی از سره کـردن اعـداد ایـن وضـعیت را تغییر می‌دهد. در هر مدل خطی ساده که در آن یک پارامتر a موجود است که صفر نیست، مجموع پس مانده‌ها صفر خواهد شد مگر به سبب لغزش‌های ناشی از سره کردن اعداد.

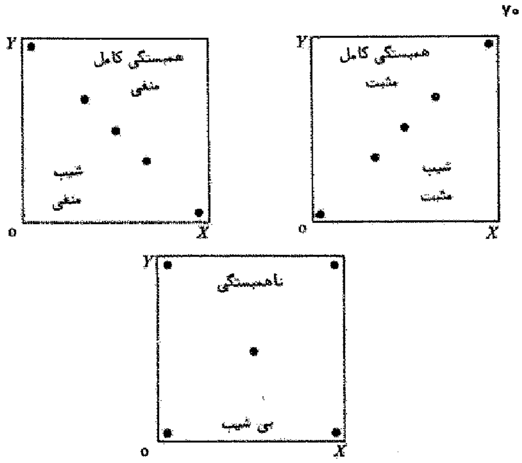
می‌دانیم که هربار که y_cای را بـرآورد یـا پیش‌گویی کـنیم کـه بـه مـیزان لغزش استانده یا میانگین ریشه دوم بزرگتر یا کوچکتر از صفر باشد لغزشی به وجود خواهد آمد. آزمایش مورد استفاده معمول برای یافتن انـدازه ایـن لغزش در مورد پسروی ساده لغزش استانده برآوردی (SEE_S) نام دارد کـه آن را از محاسبه معادله زیر بدست می‌آورند:

$$SEE_s=\sqrt{\frac{I}{n}\sum_{i=۱}^{n}(\bar{y}_i-\bar{y}_c)^۲}$$

این معادله از جنبه‌های بسیار شبیه میانگین ریشه دوم می‌باشد، مگر آن کـه لغـزش اسـتانده یـا انـحراف مـقادیر y_i در حـدود مـعادله بـرآوردی $y_c=a+bx_i$ یا $y_c=a+b(x_i-\bar{x})$ باشد. اختلاف V را می‌توانیم با تقسیم SEE به y و ضرب نتیجه در ۱۰۰ محاسبه کرد.

ضریب هم‌پیوستگی

مهمترین آزمایش مدل‌های خطی ساده ضریب هـم‌پیوستگی سـاده (r) مـی‌باشد. r هـمیشه در فـاصله I.00+ r I.00- قـرار مـی‌گیرد. در حـالتی نظری که r مساوی I.00+ است یک هم پیوستگی کامل مثبت موجود است و هنگامی که r=-I.00 است یک هم‌پیوستگی کامل منفی.نگاره ۷ ترسیم این امکانات تئوری یا نظری را نشان می‌دهد.



نگاره۷: انواع نظری همبستگی کامل

جهان حقیقی هیچ یک از سه امکان هم‌پیوستگی‌های کامل یا غیر کامل را بدست نمی‌دهد. مطلوب ما آن است که مـدل‌های سـاده خـطی را از طـریق محاسبه r آزمایش کنیم و آن مدل‌هایی را که r در آن‌ها نزدیک I+ یا I- است بپذیریم. مقادیری از r که نزدیک صفر هستند نشان می‌دهند که مدل خطی مربوطه قابل قبول نیست. تصمیم بر این که r باید به چه اندازه I.00+ I.00- نزدیک باشد، موضوعی است که به فـراست و قـضاوت تـحلیل‌گر بـه مـدد چندین آزمایش بستگی دارد. اما در بسیاری موارد قضاوت و تحلیل فراستی درباره ویژگی‌های اختیار شده یک مسأله ممکن است به همان انـدازه مـهم باشد که آزمایش‌های کمی. یکی از متداول‌ترین آزمایش‌های r تـعیین ایـن نکته است که برای هر درجه اختیاری از آزادی r,df چه میزانی باید باشد، تا احتمال این که هم‌پیوستگی ناشی از تصادف نیست را نشان دهد. این همان است که آزمایش مفروض صفر نامیده می‌شود و لازم می‌آورد که r دست کم به مقدار r_s باشد تا ثابت شود که وجودش اتفاقی نیست.

این آزمایشی واجد اهمیت است که می‌تواند با مراجعه به یک r استانده یا جدول R مورد استفاده قرار بگیرد(به ضمیمه B مراجعه شـود). مـانند آزمایش «چای» مربع، معمولاً سطوح واجد اهمیت بین 0.0r و 0.05 عموماً مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مقدار r با مربع آن (r^2) که به ضریب یا همگر تعیین کننده موسوم است و عبارت است از نسبت تفاوت توضیح داده شده معلوم به مجموع تفاوت، ارتباط دارد. همگر تعیین کننده درصـد تـفاوت y است نسـبت بـه مـتوسط خود $(\bar{y})$ که می‌تواند با مدل‌های خطی سـاده بـه حـساب آورده شـود. بـقیه تفاوت با «پس مانده»ها به حساب آورده می‌شود و از این رو با ویژگی‌های جهان حقیقی همبستگی دارد. مثلاً اگر $r^2=۰/۷۸$ باشد، می‌توانیم بگوییم که ۷۸ درصد تفاوت با مدل ساده خطی به حساب آمده است و ۲۲ درصد تفاوت

نمی‌تواند با این مدل به حساب آید. البته، r^2 در فاصله بین $-1.00, +1.00$ قرار دارد، به قسمتی آزمایش‌های r, r^2 باید مکمل و مبین باشند. مقدار r^2 به شیوه زیر محاسبه می‌شود.

$$r^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]\right)^2}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right]}$$

ضریب هم‌پیوستگی (r) با یافتن ریشه دوم r^2 بدست می‌آید. اگر کامپیوتر شمارشگر مورد استفاده قرار نگیرد، راه مطلوب دیگر استفاده از فرمول داده‌های خام است:

$$r = \frac{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i \sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{\left[\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\right]\left[\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}\right]}$$

در این حالت همگر تعیین کننده (r^2) را با به توان دوم رسانیدن r بدست می‌آورند.

در این جا پس از بدست آوردن r, r^2 تحلیل‌گر باید تصمیم بگیرد آیا مدل خطی مورد امتحان رضایت بخش است یاخیر. با استفاده از یک آزمایش منطقی فراستی که در آن تحلیل‌گر اندازه a و علامت شیب b را امتحان می‌کند، بینشی نسبت به این نکته حاصل می‌آید. اگر a در مقایسه با متوسط متغیر غیرمستقل $\bar{y}$ از حد معمول بزرگتر باشد، پایه‌ای فراستی برای رد مدل ممکن است به وجود آید. به همین گونه، اگر علامت b که در جهت شیب و همچنین علامت ضریب هم‌پیوستگی را نشان می‌دهد، به فراست منطقی به نظر نرسد، پایه‌ای برای رد کردن مدل ممکن است به وجود آید. فی‌المثل، اگر با استفاده از متغیر درآمد خانواده‌ها به پیش‌گویی صرف هزینه مصرف کنندگان بپردازیم و اگر مدل نشان دهد افزایش صرف هزینه با افزایش درآمد رابطه معکوس دارد، چندین سؤال به وجود می‌آید، زیرا به فراست می‌توان دریافت که این امر غیرمنطقی است.

آزمایش بازدهی یک مدل ساده خطی که گاه مورد استفاده قرار می‌گیرد به شاخص پیش‌گویی از بازدهی (IPE) موسوم است. این آزمایش معیاری است برای این که معلوم شود، پیش‌گویی مدل به پربازده‌ترین صورتی انجام گرفته است یا نه: $IPE=100.00(1-K)$ که در آن $K=\sqrt{1-r^2}$.

در تجزیه و تحلیل‌های شهری این آزمایش تا اندازه‌ای به «خشک» بودن گرایش دارد، زیرا اطلاع ما از مسائل جهان حقیقی در حد کمال نیست. مثلاً برای این که بگوییم IPE بازدهی متجاوز از ۵۰ درصد نشان می‌دهد، باید ضریب هم‌پیوستگی 0.87 باشد (که در بسیاری موارد مسائل شهری، چنین رقمی بسیار زیاد است)

کاربردهای مدل خطی

برنامه‌ریزی خطی می‌تواند در زمینه‌های مختلف مطالعه مورد استفاده قرار گیرد. برنامه‌ریزی خطی به طور عمده در موقعیت‌های تجاری و اقتصادی مورد استفاده قرار می‌گیرد اما برای بعضی از مسائل مهندسی نیز می‌تواند به کار برده شود. بعضی از صنعت‌ها که برنامه‌ریزی خطی را مورد استفاده قرار می‌دهند عبارتند از حمل و نقل، انرژی، مخابرات و کارخانه‌ها و... همچنین در مدل کردن مسائلی از قبیل برنامه‌ریزی، مسیریابی، زمان‌بندی، تخصیص و طراحی مفید است. یک ارزیابی انجام شده از ۵۰۰ شرکت بزرگ دنیا، نشان داد که ۸۵ درصد آنها از برنامه‌ریزی خطی استفاده نموده‌اند. برنامه ریزی خطی کاربردهای متعددی در ارتش، حکومت، صنعت و مهندسی شهرسازی یافته است همچنین اغلب به عنوان بخشی از طرح‌های محاسباتی، حل مسائل برنامه ریزی غیرخطی، برنامه‌های گسسته، مسائل ترکیباتی، مسائل کنترل بهینه و برنامه‌ریزی احتمالی به کار می‌رود. برنامه‌ریزی خطی زمینه مهمی در بهینه سازی برای چندین دلیل است: بسیاری از مسائل عملی در تحقیق عملیات به عنوان مسئله برنامه‌ریزی خطی می‌تواند بیان شود و همچنین تعدادی از الگوریتم‌های دیگر مسائل بهینه‌سازی به وسیله‌ی حل مسائل برنامه‌ریزی خطی، به عنوان زیر مسئله کار می‌کنند. به طور تاریخی ایده‌های برنامه‌ریزی خطی الهام بخش بسیاری از مفاهیم اولیه تئوری بهینه‌سازی مانند دوگانگی، تجزیه، اهمیت تحدب و تعمیم آن بوده است. برنامه‌ریزی خطی به طور عمده در اقتصاد کلان، مدیریت تجاری، حداکثر کردن درآمد یا حداقل کردن هزینه‌ی تولید به کار می‌رود. به عنوان مثال: مدیریت موجودی، مدیریت دارایی و سهام، تخصیص منابع انسانی و منابع غیرانسانی، برنامه‌ریزی سفرهای تبلیغاتی. در بسیاری شرکت‌ها و مؤسسات دولتی با به کارگیری موفقیت‌آمیز برنامه ریزی خطی، میلیون‌ها دلار صرفه جویی کرده‌اند. در زیر به بیان چند مورد از این موفقیت‌ها اشاره می‌کنیم:

با استفاده از برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی عدد صحیح، روشی برای زمان‌بندی گشت افسران پلیس در سان فرانسیسکو، توسط تیلور و هاکس لی(۱۹۸۹) طراحی گردید. با این روش سالانه ۱۱ میلیون دلار صرفه جویی حاصل شد، زمان پاسخ گویی به درخواست‌ها نیز حدود ۳ میلیون دلار در سال افزایش یافت.

با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، چائو و دیگران(۱۹۸۹) در حدود ۷۹ پست برق و بیش از ۱۲۵ میلیون دلار در خرید موجودی و هزینه‌های کمبود صرفه جویی کردند.

با استفاده از مدل‌های شبکه پاول و دیگران(۱۹۸۸) یک مدل جهت تخصیص بار برای رانندگان کامیون در شرکت خطوط آمریکای شمالی توسعه دادند. استفاده از این مدل باعث ارائه خدمات بهتر به مشتریان و کاهش حدود ۲/۵ میلیارد دلار هزینه سالیانه شده است.

مسائل و محدودیت‌های مدل خطی

یکی از محدودیت‌های اصلی کاربرد مدل‌های خطی این است که بسیاری از روابط مورد توجه برنامه‌ریز ممکن است شکل خطی نداشته باشند. البته همان طور که ذکر شد، این امکان که متغیر را به شکل خطی تبدیل نماییم وجود دارد(یعنی با استفاده از مقادیر لگاریتمی متغیر)

با وجود تمامی این مسائل کاربرد ساده و ارزان مدل‌های خطی از مزایای مهم آن محسوب می‌گردد. زیرا این مدل‌ها بر اساس تکنیک استاندارد آماری که به طور وسیعی به کار می‌رود استوار است.

با بهبود شناخت ما از محیط شهری و امکان بیان این شناخت به شکل نمادی، می‌توان انتظار داشت که ساخت‌های واقع بینانه‌تری جای مدل‌های خطی را بگیرد. تا هنگامی که چنین شناخت بهتری میسر نگردیده، شهرساز با استفاده از همین مدل‌های موجود ادامه خواهد داد.

کاربرد مدل‌های خطی در برنامه‌ریزی شهری

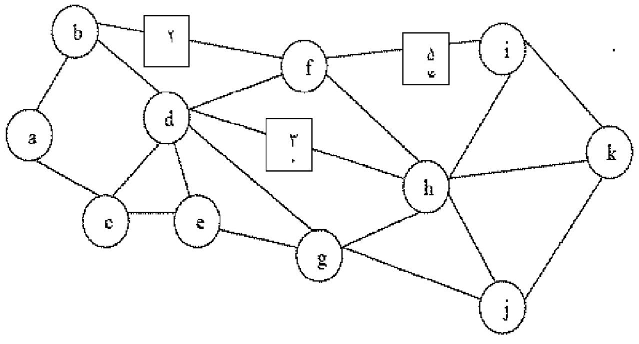
۱- دانستن چگونگی حرکت گردشگران (تحت شرایط زمانی و مکانی) و عواملی که جابجایی‌های آنها را تحت تأثیر قرار می‌دهند، برای توسعه حمل و نقل و زیرساخت‌ها، رشدتولید، طراحی مناطق گردشگری و طراحی جاذبه‌های جدید به اندازه مدیریت اجتماعی، زیست محیطی و تأثیرات فرهنگی اهمیت دارد بخصوص در مورد مناطقی که دارای تنوع جاذبه‌ای و تردد بالای گردشگر هستند، و در بعضی روزها یا ماه‌های سال با معضلات شدید ترافیکی مواجه می‌شوند. مدل‌هایی که الگوی فضایی حرکت گردشگران را در منطقه گردشگری توصیف می‌کنند، جهت افزایش تولید و جذب سرمایه گذاری و همچنین برنامه‌ریزی و مدیریت شهری، اطلاع از نحوه حرکت گردشگر در منطقه گردشگری، لازم و دارای کاربردهای مناسب و مفیدی می‌باشند. جهت شناسایی عوامل توضیحی که می‌توانند بر جابجایی‌ها مؤثر باشند، استفاده از رویکرد القایی بر مبنای مدل حمل و نقل شهری و رفتار گردشگر، توسعه پیداکرده است. این عوامل به دو طریق بر مدل‌های حرکت تأثیر می‌گذارند که شامل چهار حالت مدل‌های حوزه‌ای و سه حالت مدل‌های خطی میسر می‌شود.

۲- تحلیل و بهینه سازی اقتصادی ایستگاه‌ها و مسیرهای حمل و نقل داخل شهری: روش‌های مختلفی برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر و در عین حال بهینه‌ترین ایستگاه‌ها برای احداث مترو، قطار شهری، ایستگاه‌های اتوبوس و ایستگاه‌های تاکسی ارائه شده است. ما در این مقاله فرض را بر این قرار داده‌ایم که براساس مطالعات آماری چندین ایستگاه و مسیر شناسایی شده است و با استفاده از مدل برنامه‌ریزی خطی بهینه‌ترین ایستگاه‌های و کوتاه‌ترین مسیرها (کوتاه‌ترین مسیر براساس هزینه) را انتخاب می‌کنیم. یافتن کوتاه‌ترین مسیر و بهینه‌ترین ایستگاه‌ها تا حد بسیاری باعث کاهش ترافیک، کاهش زمان رسیدن به مقصد و در نهایت کاهش هزینه می‌شود.

همواره برای ایجاد یک مسیر حرکت وسایل نقلیه عمومی زمینی یا زیرزمینی مهم‌ترین عامل شناسایی ایستگاه هایی است که قرار است مسیرها این ایستگاه‌ها را به هم متصل کند. انتخاب ایستگاه‌ها معیارهای مختلفی دارد که می‌توان به تراکم جمعیت در آن قسمت، قرار گرفتن مناطق مسکونی، واحدهای صنعتی و غیره اشاره کرد.

فرض ما براین است که براساس مطالعات آماری و یافتن مراکز تراکم جمعیت ایستگاه‌هایی مکان‌یابی شده است و با توجه به آن ایستگاه‌های متعدد مسیرهای زیادی شناسایی شده است، هدف یافتن کوتاه‌ترین مسیر و بهینه‌ترین مسیر است که ایستگاه ابتدایی را به ایستگاه انتهایی متصل می‌کند.

یافتن کوتاه‌ترین مسیر براساس هزینه: تعدادی مسیر و ایستگاه وجود دارند که ما باید از بین آنها بهینه‌ترین را انتخاب کنیم(بهینه یعنی این که در عین حال که کوتاه‌ترین مسیر است کم هزینه‌ترین هم باشد) برای این کار مبحث شبکه‌ها در OR_3 را به کار می‌بریم. با استفاده از این روش به یافتن بهینه‌ترین مسیر از نظر هزینه می‌پردازیم. می‌توان گفت این روش یک تحلیل حساسیت می‌باشد. فرض کنید ایستگاه‌های زیر شناسایی شده‌اند.



نگاره ۸: ایستگاه‌ها و مسیرهای شناسایی شده اعداد داخل مربع i به j می‌باشد (چند مورد برای نمونه)

فرض کنید اعداد موجود بر روی شبکه فوق هزینه احداث مسیر از ایستگاه i به ایستگاه j باشد (البته می‌توان سایر هزینه‌ها از جمله هزینه رفت و آمد از i به ایستگاه jرا در کنار هزینه مذکور اضافه کرد)

$$\text{Minimaize } z= \sum_{i}\sum_{j\neq i} c_{ij}\, x_{ij} \qquad \text{s.t:}$$

$\sum_{k\neq j} x_{jk} - \sum_{k\neq j} x_{kj} = ۱$ اگر jمبدا باشد

$\sum_{k\neq j} x_{jk} - \sum_{k\neq j} x_{kj} = ۰$ اگر jنه مبدا و نه مقصد باشد

$\sum_{k\neq j} x_{jk} - \sum_{k\neq j} x_{kj} = -۱$ اگر jمقصد باشد

$x_{ij} \geq 0$

با حل مدل فوق از طریق نرم‌افزارهای or یا به صورت دستی، کوتاه‌ترین مسیر از لحاظ هزینه شناسایی می‌شود. نکته قابل توجه در این مرحله این است که می‌توان از مدل برنامه‌ریزی خطی کوتاه‌ترین مسیر براساس فاصله و کوتاه‌ترین مسیر براساس زمان را نیز بدست آورد.

براساس موارد ذکر شده نتایج ذیل حاصل می‌گردد:

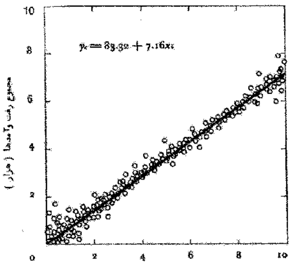
۱- یافتن کوتاه‌ترین مسیر سبب کاهش زمان از مبدا تا مقصد می‌شود. امروزه در کلان شهرها اگر زمان تلف شده در ترافیک در یک روز را محاسبه کنیم برای تمام افرادی که جابجا می‌شوند شاید برابر کل عمر یک انسان باشد که با یافتن کوتاه‌ترین مسیر می‌توان این زمان را تا حد بسیاری کاهش داد.

۲- یافتن کم هزینه‌ترین مسیر سبب کاهش هزینه در احداث مسیر و رفت و آمد می‌شود.

۳- یافتن بهینه‌ترین ایستگاه‌ها و کوتاه‌ترین مسیر علاوه بر موارد ذکر شده در ۲ مورد قبلی باعث کاهش آلودگی هوا، کاهش تصادفات، کاهش مصرف سوخت، کاهش استهلاک اتومبیل و... می‌شود.

نمونه اجرا شده مدل در منطقه ویسکانتین (Wisconsin)

مثالی از یک مدل خطی حقیقی جهان حقیقی توسط «شورای برنامه‌ریزی ناحیه‌ای ویسکانسین» برای برآورد و پیش گویی کل رفت و آمدهایی (y_c) که خانواده‌هایی به نفرات متفاوت انجام می‌دادند ساخته شد (نگاره ۹ ملاحظه شود). به عنوان مثال ما فقط خانواده‌های سه نفری را بررسی کرده‌ایم. در این حالت شکل مدل خطی مطلوب $Y=a+bX$ بود. از این رو یک الگوریتم محاسباتی دیگر (که اغلب فرمول داده‌های خام نامیده می‌شود) لازم آمد. این الگوریتم قدری پرزحمت‌تر است، اما از نظر ریاضی مانند الگوریتم قبلی است.



نگاره ۹: مدل خطی جنوب شرقی روی ویسکانسین

این الگوریتم معادله‌ای روشن‌تر بدست می‌دهد، با این همه به نظر می‌رسد.

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}-b\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

که استفاده از $y_c=a+b(x_i-\bar{x})$ در محاسبات، کار را آسان‌تر می‌کند.

نتیجه گیری

برای آن‌که بتوان فهمید مدل‌های خطی ساده تا چه اندازه قابل اعتمادند، آزمایش‌های متعدد دیگری موجودند که میزان نیاز به آنها و ارتباط آنها با مساله متفاوت است. برای تجزیه و تحلیل مسائل شهری، مناسب‌ترین جهت در آزمایش مدل‌های خطی ساده اگر ضریب یا همگر پیوستگی و همگر تعیین کننده، لغزش استانده برآورد و تفاوت و آزمایش‌های منطقی فراستی، تحلیل‌گر را قانع نمی‌کنند ایجاد سطح اعتماد است.

سطوح اعتماد را می‌توان برای پیداکردن تطابق مدل (یعنی، پارامترهای b,a) و مقادیر برآورد و پیش‌گویی، محاسبه کرد. سطوح اعتماد، همان نتیجه‌ای را دارند که درصد چیزی را ذکر کنیم. مثلاً اگر بگوییم سطح اعتماد این مدل ۹۵ درصد است، تحلیل‌گر می‌تواند نتیجه بگیرد درجه‌ای که می‌توان به این مدل اطمینان کرد ۹۵ درصد است، این عمل با تعیین دامنه‌ای که مقادیر فرضی یا واقعی b,a و y_c در آن قرار می‌گیرند، انجام می‌شود. این دامنه، محدوده اعتماد، نامیده می‌شود و به راه زیر محاسبه می‌گردد:

برای a

$$a-t\sqrt{\frac{s^2}{n}}\leq \text{واقعی } a\leq a+t\sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

برای b

$$b-t\sqrt{\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\leq \text{واقعی } b\leq b+t\sqrt{\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$$

و برای $\bar{y}_c$

$$[a+b(\bar{x}_i-\bar{x})+p]\leq \text{واقعی } y_c\leq[a+b(\bar{x}_i-\bar{x})+p]$$

که در آن

$$s^2=\frac{1}{n-2}\left(\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2-b^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]\right)$$

t= مقدار داده شده برای سطح اعتماد در انطباق با درصد موردنظر و n-۲.

$$p=t\times s\sqrt{1+\frac{1}{n}+\left[\frac{(\bar{x}_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right]}$$

مقدار t ثابت و تجربی است و گونه‌ای از توزیعی عادی یا هنجاری که مقدار t را برای سطوح مختلف اعتماد به دست می‌دهد. در تجزیه و تحلیل‌های شهری سطوح اعتماد معمولاً به ۷۵ تا ۹۵ درصد مشخص می‌شوند، بسته به آن که مسأله و ارقام و اطلاعات به دست آمده چه باشند.

فرض کنید که محدوده اعتماد بالا با سطح اعتماد ۹۵ درصد محاسبه کرده‌ایم و $y_c=$ ۳۰۰+۲۰ (x_i-۶۰) بدست آمده است.

که در آن

n=۶۲

s^2 =۶/۲۰۰

و ۲۸۰ ≤ a واقعی ≤ ۳۲۰

۱۸ ≤ b واقعی ≤ ۲۲

و به ازای x_i=۱۶۰، y_c=۲.۳۰۰

۱,۹۸۵ ≤ y_c واقعی ≤ ۲/۶۱۶۰

بنابراین چون تمام مقادیر b,a و y_c در محدوده اعتماد محاسبه شده ما قرار می‌گیرند، می‌توانیم نتیجه بگیریم که انطباق و پیش‌گویی مدل به سطح اطمینان ۹۵ درصد است.

منابع و مآخذ

۱- آنتنی کاتانزی، روش‌های علمی تحلیل مسایل شهری، ترجمه منوچهر مزینی، ۱۳۷۱، انتشارات دانشگاه تهران

۲- واین ال وینستون، برنامه‌ریزی خطی (تحقیق در عملیات)، مترجمان: رضا زنجیرانی فراهانی، نسرین عسگری، محمد مدرس یزدی، چاپ اول، ۱۳۸۰، نشر ترمه

۳- مختاراس، بازارا، جان جی، جارویس، حنیف دی، شرالی، برنامه‌ریزی خطی، ترجمه دکتر اسماعیل خرم، ۱۳۷۸، نشر کتاب دانشگاهی

۴- مهدی اکبری، غلامعلی شفابخش، تحلیل و ارائه مدل‌های حرکت گردشگر در نقاط گردشگری شهری، ۱۳۸۵، اولین کنفرانس برنامه‌ریزی و مدیریت شهری

۵- محمدرضا مهرگان، پژوهش عملیاتی، ۱۳۷۸، نشر کتاب دانشگاهی

۶- مجتبی گلشنی، برنامه‌ریزی و کنترل پروژه، ۱۳۸۲، نشر زمان

۷- جیمز مک گرگور اپل، طرح ریزی واحدهای صنعتی، ترجمه اردوان آصف وزیری، ۱۳۸۱، نشر جوان

۸- کاربرد مدل‌های رگرسیون خطی فازی در تخمین بار پیک روزانه یک فیدر خانگی در یزد، زهره سلیمیان، فرخ امینی، ۱۳۸۴، بیستمین کنفرانس بین المللی برق

9- J.L.Bently,"Fast Algorithms for Geometric Traveling Salesman Problems,"ORSA Journal on Computing,4(4),387-411,1992.