استفاده از سرشکنی مرحله به مرحله نقشه‌برداری

نوشته دکتر ای - دی - ویجایرانت[1]

توضیح مختصری در مورد نویسنده

نویسنده این مقاله مربی نقشه‌برداری در دانشگاه فنی میشیگان است و دروس سطوح بالای لیسانس نقشه‌برداری را تدریس می‌کند. او دارای مدرک لیسانس ریاضی از دانشگاه سریلانکا، مدرک دورهٔ عالی (Post Graduat Diploma) در نقشه‌برداری از کالج دانشگاهی لندن و مدرک فوق لیسانس در علوم ژئودتیک از دانشگاه ایالتی اوهایو و هم چنین عضو Asprs, ۱ Acsm ۲ و جامعه نقشه‌برداران رسمی میشیگان است.

خلاصه

اصول سرشکنی کمترین مربعات تاکنون با جزئیات کامل در کتب درسی به صورت مقاله در مجله‌های بسیاری شرح داده شده است. این عملکرد (عنوان مقاله) در ارتباط با سرشکنی کمترین مربعات معمول است، که در آن مجموعه‌ای از مشاهدات به‌طور هم‌زمان پردازش شده و برآوردی معین از پارامترهای مجهول حاصل می‌گردد (با این فرض که تمام مشاهدات لازم، جمع‌آوری شده و همچنین عاری از اشتباهات باشند).

مطلب فوق حالتی است که در اکثر سرشکنیها وجود دارد. اما گاهی ممکن است تتوانیم تمام مشاهدات را در یک وهله تأمین کرد، یا اینکه بخواهیم سرشکنی را با مجموعهٔ کوچکی از مشاهدات انجام داده و سپس، در صورت لزوم، مشاهداتی را حذف یا اضافه نموده تا به بهترین برآورد پارامترهای مجهول برسیم. اگر در هر بار تعویض مشاهدات تمام سرشکنی را تکرار کنیم اتلاف وقت و انرژی است. اثر افزودن یا حذف مشاهدات را می‌توان به روش سرشکنی مرحله به مرحله تعیین کرد. انجام این عمل همچنین می‌تواند به میزان زیادی حافظه کامپیوتری لازم برای پردازش هم‌زمان تمام مشاهدات را کاهش دهد.

مقدمه

سرشکنی مشاهدات نقشه‌برداری به روش کمترین مربعات چیز تازه‌ای نیست. در این مورد در کتب درسی و مجله‌های متعددی بحث شده است. این روش می‌تواند وسیله‌ای با ارزش در نقشه‌برداری گردد. اگر چه هنوز عدهٔ زیادی جهت استفادهٔ از آن بی‌میل هستند. این را می‌توان بدین شکل توجیه کرد که، برای اکثر نقشه‌برداران، سرشکنی دقیق لزومی ندارد. چون با دستگاههای مدرن امکان اندازه‌گیریهای خیلی دقیق وجود دارد. اما با این همه شرایطی پیش می‌آید که سرشکنی می‌تواند نتایج را بهبود بخشد، (مخصوصاً مواقعی که وضعیت هندسی ضعیفتری برقرار می‌گردد). حتی اگر سرشکنی بهبود عمده‌ای را در نتایج حاصل نکند، با سرشکنی کمترین مربعات می‌توان اشتباهها را کشف کرده و برآوردی از پارامترهای سرشکن شده به‌دست آورد.

سرشکنی کمترین مربعات

در روش کمترین مربعات فرض بر این است که مشاهدات عاری از اشتباه و خطاهای سیستماتیک بوده، و تنها تحت تأثیر خطاهای اتفاقی هستند. تمام اندازه‌گیریهای لازم به همراه برآورد دقت آنها می‌بایست قبل از سرشکنی فراهم شوند. سرشکنی عموماً در اکثر پروژه‌های نقشه‌برداری، حتی اگر روشهای دیگر نیز موجود باشد به روش «معادلات مشاهدات» یا «تغییر مختصات» صورت می‌گیرد. این روش در کتب زیادی شرح داده شده (به عنوان مثال Mikhail, 1976) اما در ذیل مختصراً به آن اشاره خواهد شد.

هر مجموعه از مجهولات دارای ارتباط تابعی با اندازه‌گیریهاست. این ارتباط در زیر به فرم ماتریسی نشان داده شده است.

$$L_a = F(X_a) \qquad (1)$$

که در این رابطه

L_a، مجموعه‌ای از مشاهدات تئوری

X_a، مجموعه‌ای از پارامترهای تئوری است. همچنین

$$L_a = L_b + V \qquad (2)$$

است که در آن، L_b نشان دهندهٔ مشاهدات واقعی مربوط به مجموعهٔ (۱) است. با ترکیب (1) و (2) داریم

$$L_b + V = F(X_a) \qquad (3)$$

یا

$$V = AX + L \qquad (4)$$

که درآن A ماتریس ضرائب، با بعد $n \times u$ است (n تعداد مشاهدات و u تعداد پارامترها در سیستم معادلات است). اگر ارتباط تابعی بین مشاهدات و پارامترها غیرخطی باشد، هریک از معادلات را می‌بایست با استفاده از سری تیلور خطی کرد. در این صورت عناصر ماتریس A به صورت $a_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_{ij}$ خواهند بود، که با استفاده از برآورد اولیهٔ پارامترها X_0

محاسبه می‌شود X_0 به صورتی است که

$$X_a = X_0 + X \qquad (5)$$

با این عمل

$$L = L_0 - L_b \qquad (6)$$

L_0، جملات ثابت بسط سری تیلور است.

به عبارت دیگر، L را می‌توان به عنوان خطای مشاهدات، مازاد مقدار X_0 برای پارامترها، در نظر گرفت. اکنون X نشان دهندهٔ بردار تصحیحات برآورد اولیه پارامترهاست . نتیجهٔ حاصل از کمترین مربعات عبارت است از

$$X = -(A^T PA)^{-1} A^T PL \qquad (7)$$

در این رابطه P ماتریس وزن مشاهدات است، غالباً $P = Q^{-1}$ در نظر می‌گیرند که در آن Q ماتریس کوواریانس مشاهدات می‌باشد. معادلهٔ (7) را می‌توان به صورت زیرنوشت.

$$X = - N^{-1} U$$

که در آن $N = A^T PA$ بوده که ماتریس نرمال مشاهدات نامیده می‌شود. و $U = A^T PL$ است. دقت پارامترهای برآورده شده با $Q_{xx} = \hat{\sigma}_o^2 \ N^{-1}$ به دست می‌آید.

و $\hat{\sigma}_o^2 = \frac{V^tPV}{n - u}$ است . n ، u راقبلاً تعریف کردیم . $\hat{\sigma}_o^2$ را واریانس وزن واحد اولیه یا به اختصار واریانس مبنا می‌نامیم. کمیت V^tPV نشان دهندهٔ مجموع مربعات وزن دار باقیمانده هااست. دراین مقاله آمده است که چگونه اطلاعات اضافی را می‌توان بعد از سرشکنی کمترین مربعات پردازش کرد. این عمل که در کتاب (Mikhail, 1976) شرح داده شده، و عموماً جزء بعضی از دروس دانشگاه است. این روش را در موارد زیر می‌توان بکار برد.

۱) پردازش مشاهدات در مجموعه‌های کوچک زمانی که تعداد مشاهدات موجود زیاد است.

۲) افزودن مشاهدات به شبکه‌هائی که قبلاً سرشکن شده‌اند (به منظور بهترسازی پارامترها)

۳) مشاهدات را در صورت مشکوک بودن به وجود اشتباه در آنها می‌توان حذف نموده و تأثیر حذف آنها را در بهبود نتایج بررسی کرد.

۴) بهترین مجموعهٔ مشاهدات را با افزودن و حذف پیاپی مشاهدات می‌توان به دست آورد.

۵) پارامترهای جدید یا شروط جدیدی را می‌توان به صورت مرحله به مرحله، در صورت لزوم اضافه نمود.

اکثر مسائل نقشه‌برداری در حالت طبیعی و به طور کلی، غیرخطی هستند، یعنی، مشاهدات و پارامترهای مربوط به آنها ارتباط غیرخطی دارند، یک مورد استثنا در این مورد ترازیابی است. در هرمسئلهٔ غیرخطی برآورد نهائی پارامترها با تکرار حل تا می‌نیمم شدن اثر جملات حذف شده در سری تیلور، طی عمل خطی کردن، به‌دست می‌آید. شرط تکرار را می‌توان بدین گونه قرار داد که تصحیح X محاسبه شدهٔ نهایی خیلی به صفر نزدیک شود.

معادلات ذیل برای برآورد اثر افزودن یا حذف مشاهدات از نتایج سرشکن شدهٔ قبلی به کار می‌رود.

$$\Delta X = - N_1^{-1} A_2^T (A_2 N_1^{-1} A_2^T + Q_2)^{-1} (A_2 X^* \pm L_2) \qquad (9)$$

در این رابطه

X^*، تصحیحات پارامترهای محاسبه شده از سرشکنی اولیه.

ΔX، تغییرات حاصل در پارامترها بعد از حل مرحله به مرحله.

Q_2، ماتریس کوواریانس مجموعهٔ دوم مشاهدات (فرض براین است که با مجموعه مشاهدات اولیه در ارتباط نباشد).

در معادلهٔ فوق علامت (+) برای مشاهدات اضافه شده و علامت (-) برای مشاهدات حذف شده به کار برده می‌شود. N و A و L دارای مفهوم همیشگی خود به صورتی که قبلاً شرح داده شد می‌باشند. اندیس 1 دلالت برسرشکنی اولیه و اندیس 2 دلالت بر سرشکنی مرحلهٔ بعدی دارد. از رابطه فوق چنین برمی‌آید که تنها اطلاعات لازم از سرشکنی اولیه، معکوس ماتریس نرمال و بردار X است. در مورد مسائل غیرخطی X (تصحیحات آخرین تکرار حل قبلی) عملاًصفر فرض می‌شود. در نتیجه معادلهٔ (۹) را می‌توان به صورت

$$\Delta X = - N_1^{-1} A_2^T [A_2 N_1^{-1} A_2^T \pm Q_2]^{-1} L_2 \qquad (10)$$

نوشت، ΔX را می‌بایست به مقادیر پارامترهای حاصل از آخرین تکرار سرشکنی قبلی افزود.

از مسائل موجود در روش مرحله به مرحله ممکن نبودن تکرار، از نظر تئوری، است. چون پارامترهای برآورد شدهٔ اولیه‌ای که برای محاسبهٔ A_1 ، L_1 به کاررفته می‌بایست برای A_2 ، L_2 نیز به کار رود. از آنجائی که X بعد از آخرین تکرار صفر است، این مقادیر مشابه مقادیر پارامترهای حاصل از سرشکنی قبل هستند.

اگر از روش مرحله به مرحله، با افزودن تعدادی مشاهدات جدید، به منظور بهتر سازی سرشکنی اولیه استفاده شود، تکرار تغییر قابل توجهی در نتایج به وجود نمی‌آورد. این مسئله در قسمت نتایج نشان داده شده است. اگر از روش مرحله به مرحله برای حذف مشاهدات مشکوک به اشتباه استفاده کنیم، این روش تنها می‌توان مشخص کنندهٔ مشاهدات همراه با خطا باشد. در صورت وجود مشاهدهٔ اشتباه، تمام سرشکنی بعد از حذف آن می‌بایست تکرار گردد تا بتوان به نتایج رضایت بخش رسید.

برآورد دقتها

معادلات زیر را می‌توان برای رسیدن به برآورد دقت پارامترهای سرشکن شده به کار برد

$$Q_{xx} = Q^*_{xx} - \hat{\sigma}_o^2 N_1^{-1} A_2^T [A_2 N_1^{-1} A_2^T \pm Q_2]^{-1} A_2^T N_1^{-1}$$

$$= \hat{\sigma}_o^2 N_1^{-1} - \hat{\sigma}_o^2 N_1^{-1} A_2^T (A_2^T N_1^{-1} A_2^T \pm Q_2)^{-1} A_2^T N_1^{-1} \qquad (11)$$

و ریانس مبنا در معادلهٔ فوق را می‌بایست از معادلات زیر بدست آورد.

$$V^TPV = (V^TPV)^* + L^T_2P_2L_2 + \Delta X\,(A^T_2P_2L_2)$$

و

$$\sigma_{\circ}^{\hat{}\,2} = \frac{V^tPV}{n_1 + n_2 - u}$$

که در این روابط

n_1) تعداد مشاهدات در سرشکنی اولی

n_2) تعداد مشاهدات در سرشکنی بعدی

u) تعداد پارامتر است.

در رسیدن به معادلات فوق فرض براین است که بردارهای X و U در معادلات اولیه صفراند، که برای اکثر حالات عملی معتبر است. $(V^TPV)^*$ مجموع مربعات باقیمانده‌های محاسبه شده از سرشکنی اولی است. اگر این کمیت در اختیار نبوده، ولی $\hat{\sigma}_{\circ}^{2}$ حاصل از سرشکنی اولیه معلوم باشد. $(V^TPV)^*$ را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$(V^TPV)^* = (n - u)\,\hat{\sigma}_{\circ}^{2}$$

نتایج

بدین ترتیب نشان داده شد که لزومی به پردازش تمام مشاهدات به صورت یکجا در سرشکنی کمترین مربعات وجود ندارد. حداقلی از مشاهدات را می‌توان ابتدا پردازش کرده، و بقیه مشاهدات را در مجموعه‌های کوچک اضافه نمود، بعد این مجموعه‌هارا می‌توان متناسب با کامپیوترموجود انتخاب کرد. بعد ماتریسی که روش سرشکنی مرحله به مرحله لازم است معکوس گردد برابر تعداد مشاهدات هرمرحله است. این مسئله در مواقعی که کامپیوتر بزرگ در اختیار نیست یا کامپیوتر موجود با گروههای دیگری در اشتراک است، بسیار مفید خواهد بود.

این روش وسیله‌ای با ارزش در مشخص‌سازی اشتباهات اندازه‌گیری است. بابررسی گروههای مختلفی از مشاهدات می‌توان شبکه را طراحی کرد. افزودن یا حذف پارامترها و همچنین مشاهدات در روش مرحله به مرحله میسر است. به خاطر کمبود وقت، این مطلب را نمی‌توان در این معادله مورد بحث قرار داد. این روش ابزاری باارزش مخصوصاً به هنگام افزودن تعدادی نقاط جدید به شبکهٔ نقشه‌برداری قدیمی است. □

---

1) I.D. Wijayratne School Of Technology Michigan Technologicl University Houghton ,Michigan 49931

2) American Society for Photogrammetry and Remote Sensing.

3) American congress on Surveying and Mapping.

منابع

1) Mikhail, Edward M., 1976, Observations and least Squares, Harper & Row Publishers.

2) Uotita, Urho A., class notes, The Ohio State University