# نکته‌ای چند در بکارگیری صحیح روش کمترین مربعات

مهندس علیرضا آزموده اردلان

**چکیده**

امروزه همهٔ نقشه‌برداران می‌دانند که نمی‌توان یک طول یا زاویه را بدون خطا اندازه‌گرفت. برای برقراری روابط ریاضی حاکم بر مشاهدات، لازم است سرشکنی صورت گیرد. یکی از روشهای موجود برای توزیع خطاها روش کمترین مربعات است. متأسفانه بسیاری از همکاران از نکته‌های ظریف نظریهٔ کمترین مربعات بی‌اطلاع‌اند. در این مقاله به‌صورت گام به‌گام به بررسی نظریهٔ کمترین مربعات و روش بکارگیری آن خواهیم پرداخت.

**پیشگفتار**

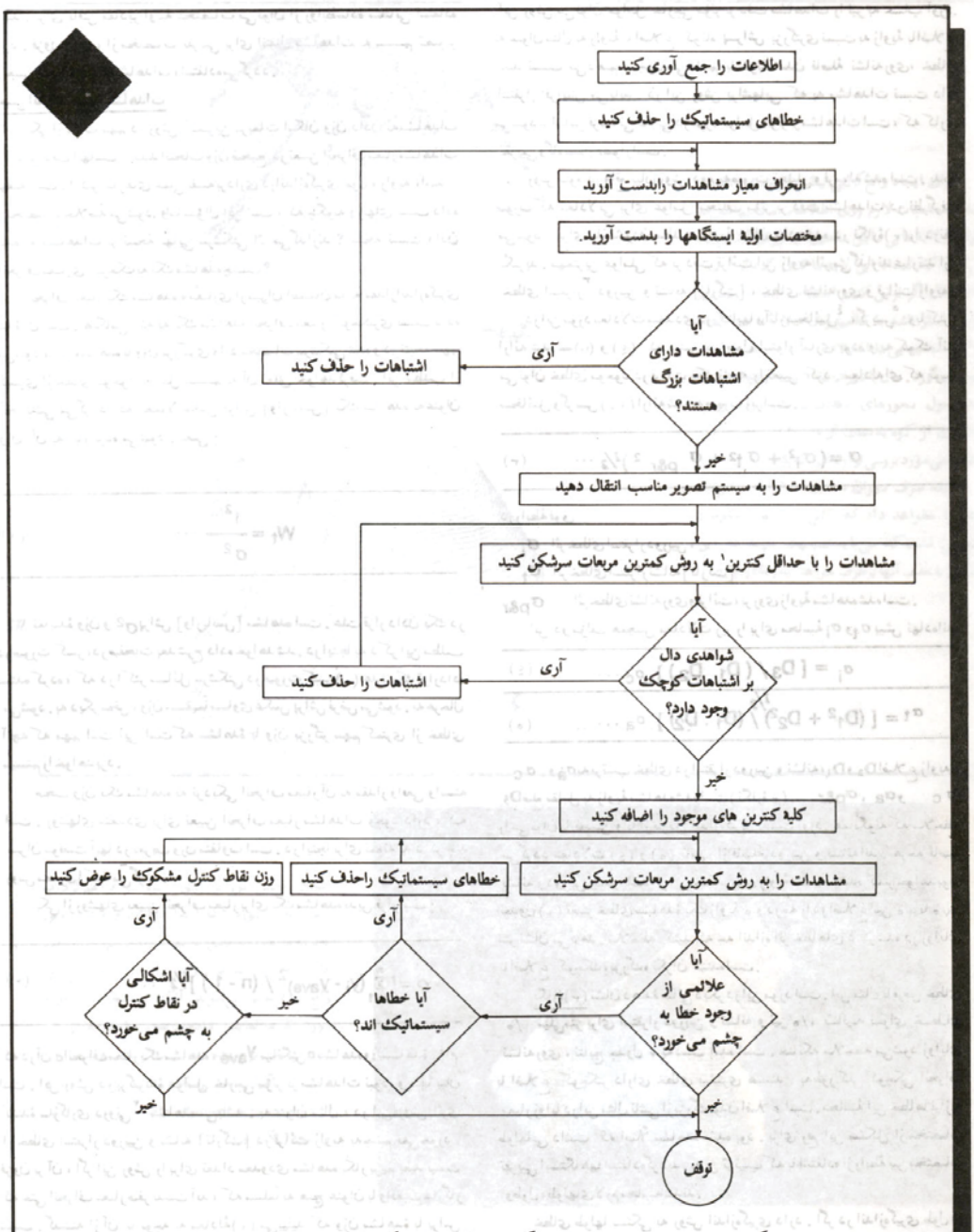
برای درک بهتر نظریهٔ کمترین مربعات ابتدا انواع خطاها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. خطاهای اندازه‌گیری را بطور کلی می‌توان به سه گروه تقسیم کرد: **اشتباهات** یا **خطاهای بزرگ**، **خطاهای سیستماتیک** و بالاخره **خطاهای اتفاقی**. سرشکنی صحیح مشاهدات مستلزم عملکرد متفاوت در مقابل هر یک از خطاهای فوق‌الذکر است. به‌عنوان مثال درصورت وجود اشتباه در یک مشاهده، باید می‌باید آن مشاهده را حذف کرد و یا آن را دوباره اندازه‌گیری کرد. خطای سیستماتیک را می‌باید شناخت و به صورت ریاضی از مشاهدات حذف کرد. خطاهای اتفاقی از قوانین احتمالات پیروی کرده و می‌باید مطابق اصول منبعث از علم احتمالات توزیع گردند.

**نگارهٔ ۱** نمایش‌دهندهٔ مراحل محاسبات و تصمیم‌گیریهای لازم در سرشکنی اطلاعات مربوط به یک شبکهٔ سطحاتی* نقشه‌برداری است. با توجه به نگارهٔ ۱ ملاحظه می‌شود که در طی مراحل سرشکنی، مشاهدات چند بار برای کشف خطاهای سیستماتیک و اشتباهات، مورد بررسی قرار می‌گیرند. البته هیچگاه نمی‌توان صددرصد اطمینان داشت که مشاهدات از اشتباهات و خطاهای کوچک سیستماتیک زدوده‌شده باشند. اما به هرحال با دنبال کردن این مراحل می‌توان مطمئن شد، که تنها امکان عبور خطاهای سیستماتیک و اشتباهات جزئی ازبالا به [فیلتر] های تعبیه شده وجود خواهد داشت. در بخشهای بعد، مراحل مختلف نگارهٔ ۱ بازگو می‌شود و ارتباط آنها با روش کمترین مربعات مورد بحث قرار می‌گیرد.

**خطاهای سیستماتیک و مختصات تقریبی ایستگاهها**

شرایط جوی و فیزیکی حاکم به هنگام مشاهدات باعث ایجاد خطاهای سیستماتیک می‌گردند. اثر منابع خطاهای سیستماتیک شناخته شده است و معمولاً در کتابهای مقدماتی نقشه‌برداری مورد بحث قرار می‌گیرند. یک نقشه‌بردار می‌باید با اینگونه خطاها آشنایی داشته باشد و بتواند اثر آنها را از روی مشاهدات حذف کند.

گفتنی است معادلاتی که در سرشکنی کمترین مربعات شبکه‌های سطحاتی بکار می‌روند غیر خطی‌اند؛ و انجام سرشکنی نیازمند به مقادیری تقریبی برای مختصات ایستگاهها است. روش محاسباتی حل مسائل غیر خطی، مبتنی بر تصحیح مقادیر اولیهٔ مختصات تا حصول مقادیر نهایی مختصات است. بطور کلی، هر اندازه




نگاره ۱ـ مراحل محاسبات و تصمیم گیریهای لازم در سرشکنی کمترین مربعات

مقادیر اولیهٔ مختصات به مقادیر نهایی نزدیکتر باشد ، زودتر می‌توان به‌جواب رسید . برای یافتن مقادیر اولیهٔ مختصات می‌توان از روابط سادهٔ مثلثاتی استفاده کرد . فزون برآن ، از مختصات تقریبی برای انتقال مشاهدات به سیستم تصویر و تعیین انحراف معیار مشاهدات ، استفاده می‌گردد .

## تعیین انحراف معیار مشاهدات

یکی از نکات مهم در روش کمترین مربعات امکان وزن دادن به مشاهدات براساس دقت آنهاست . کلید انتخاب وزن صحیح در تعیین انحراف معیار مشاهدات نهفته است . اکثر کارهای عملی نقشه برداری در اندازه‌گیری طول ، زاویه ، امتداد و مختصات خلاصه می‌شود. واما سؤال این است ، که چگونه وزنهای نسبت داده شده به مشاهدات بر نتیجهٔ نهایی سرشکنی اثر می‌گذارند ؟ نتیجهٔ نسبت دادن انحراف معیاری کوچک به یک مشاهده چیست ؟

انحراف معیار یک مشاهده ، معیاری از میزان اطمینان ما به مقدار اندازه‌گیری شدهٔ آن است . هنگامی که به یک مشاهده انحراف معیار کوچکتری نسبت داده می‌شود ، این مشاهده با وزن بزرگتری وارد محاسبات سرشکنی شده و در نتیجه سهم کمتری از خطای موجود در کل سیستم به آن تعلق خواهد گرفت . این مطلب از آنجا ناشی می‌گردد که معمولاً عکس پراش [واریانس] یک مشاهده به‌عنوان وزن آن به کار برده می‌شود . یعنی :

$$W_t = \frac{1^2}{\sigma^2} \cdots \qquad (1)$$

$W_t$ نمایندهٔ وزن و $\sigma^2$ پراش [واریانس] مشاهده است . علت قرار دادن یک در درصورت کسر ، درصفحات بعد شرح داده خواهد شد . در اینجا به ذکر این مطلب بسنده کرده ، که در اکثر مسائل سرشکنی درصورت کسر (۱) عدد یک قرارداده می‌شود . به دیگر سخن ، وزن مستقیماً مساوی عکس پراش فرض می‌شود . به هرحال آنچه که مهم است این است که مشاهدهٔ با وزن بزرگتر سهم کمتری از خطای سیستم را خواهد برد .

صحت وزن یک مشاهده به نزدیکی انحراف معیار آن به مقدار واقعی وابسته است . روشهای متعددی برای تعیین انحراف معیار مشاهدات وجود دارد ، که میزان موفقیت آنها در تعریف وزن متفاوت است . در اینجا برای نمونه به ذکر چند روش معمول اکتفا می‌گردد .

یکی از روشهای تعیین انحراف معیار برای یک مشاهده بدین قرار است :

$$\sigma = [\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{ave})^2 / (n-1)]^{1/2} \cdots \qquad (2)$$

که در آن $\sigma$ انحراف معیار یک مشاهده ، $y_{ave}$ میانگین n مشاهده و $y_i$ مشاهدهٔ iام است . این روش در برگیرندهٔ عوامل خارجی مؤثر بر مشاهدات نبوده و تنها بیان کنندهٔ سازگاری درونی[۲] مشاهده می‌باشد . به‌عنوان مثال ، در این روش اثری از خطای استقرار دوربین و نشانه [تارگت] در قرائت زاویه به‌چشم نمی‌خورد . فزون بر آن ، اگر این روش را برای تعداد معدودی مشاهده بکار بریم بعید نیست که حتی انحراف معیار صفر بدست آید ، که مسلماً به هیچ عنوان با واقعیت سازگار نیست . گذشته از آن با توجه به معادلهٔ (۱) می‌بینید که وزن مشاهدهٔ با پراش صفر تعریف نشده است .

روش دوم نسبت دادن انحراف معیارهای موضوعی به مشاهدات است . با این روش می‌توان عوامل خارجی مؤثر بر دقت مشاهدات را نیز به حساب آورد. به عنوان مثال به زاویهٔ با اضلاع کوتاه پراش بزرگتری نسبت به زاویهٔ با اضلاع بلند نسبت می‌دهیم ، چون می‌دانیم با دوتاه شدن فاصلهٔ نشانه‌روی، خطای استقرار افزایش می‌یابد . در این روش پراشهایی که به مشاهدات نسبت داده می‌شود بر اساس فرضیاتی تجربی درمورد عوامل مؤثر بر مشاهدات است ، که کاری تقریبی وگاه بسیار دشوار است.

روش سوم درواقع بیان روش دوم به‌صورت تحلیلی و فرموله شده است . بدین صورت که معادلاتی برای عوامل مختلف مؤثر بر دقت مشاهدات در نظرگرفته می‌شود . برای بازگشودن مطلب زاویهٔ نشان داده شده در نگارهٔ (۲) را درنظر بگیرید . مهمترین عواملی که بر دقت قرائت این زاویه اثر می‌گذارند عبارتند از: خطای استقرار[۳] دوربین و نشانه [تارگت] ، خطای نشانه‌روی و قرائت زاویه .

در این مورد معادلات متعددی در کتابها و آثار میخائیل[۴] ، گریس[۵] و با کنر[۶] ارائه شده ست(۱۰) و (٤) که مبتنی بر اصول استوار آماری بوده و به کمک آنها می‌توان خطای موجود در قرائت یک زاویه را تعیین کرد . معادله‌ای که توسط میخائیل و گریس (۱۰) ارائه شده به‌صورت زیر است.

$$\sigma = (\sigma_i^2 + \sigma_t^2 + \sigma_{p\&r}^2)^{1/2} \cdots \qquad (3)$$

در رابطهٔ فوق

$\sigma_i$ اثر خطای استقرار دوربین ،

$\sigma_t$ اثر خطای استقرار نشانه [تارگت]

$\sigma_{p\&r}$ اثر خطای نشانه روی و قرائت ، بر روی زاویهٔ مشاهده شده است .

این دو مؤلف همچنین معادلات زیر را برای محاسبهٔ $\sigma_i$ و $\sigma_t$ پیش نهاده‌اند.

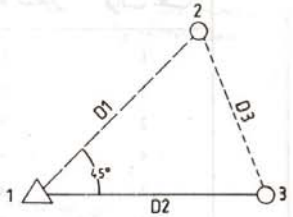
$$\sigma_i = [D_3 / (D_1 \cdot D_2)] \cdot \sigma_c \cdots \qquad (4)$$

$$\sigma_t = [(D_1^2 + D_2^2)^{1/2} / (D_1 \cdot D_2)] \cdot \sigma_a \cdots \qquad (5)$$

$\sigma_c$ و $\sigma_a$ به ترتیب خطای در استقرار دوربین و نشانه ، $D_1$ و $D_2$ اضلاع زاویه و $D_3$ ضلع مقابل به زاویهٔ مشاهده شده است ( نگارهٔ ۲ ) . $\sigma_{p\&r}$ ، $\sigma_a$ و $\sigma_c$ را می‌توان با تخمین و یا از طریق اندازه‌گیری بدست آورد. همانگونه که ملاحظه می‌گردد معادلات (٤) و (٥) تابعی از فاصلهٔ دوربین و نشانه‌اند . هرچه فاصلهٔ نشانه و دوربین بیشتر باشد اثر این خطا بر روی زاویهٔ مشاهده‌شده کمتر خواهد بود. جدول (۱) تغییر خطای مشاهدهٔ یک زاویهٔ ٤٥ درجه را در اضلاع بین ۱۰ تا ۹۷۵ متر نشان می‌دهد . ملاحظه کنید که چه اندازه اثر خطاهای ذکر شده در زوایای با اضلاع کوچک، بزرگ و نگران کننده است.

نگارهٔ (۳) نشان دهندهٔ مثالی دیگر در این مورد است . این مثال با فرض خطای ۰/۵ میلی‌متر برای استقرار دوربین و نشانه و نیز ۰/۵ ثانیه برای خطای نشانه روی ، نتایج جدول ۲ به‌دست آمده است . چنانکه ملاحظه می‌شود زوایای با اضلاع کوچکتر دارای خطای بیشتری هستند . به‌طور کلی کوچکی انحراف معیار زوایا در این مثال ناشی از بزرگ بودن اضلاع است . محاسبهٔ این خطاها نیازبه طولهایی داشت که اصلاً مشاهده نشده بود . برای رفع این مشکل از مختصات تقریبی ایستگاهها استفاده گردید . بدین ترتیب که با استفاده از رابطهٔ بین مختصات وطول ، طولهای لازم محاسبه شدند.

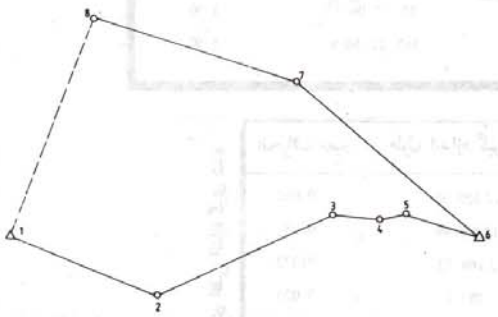
خطای طولها بستگی به روش اندازه‌گیری دارد . اگر در اندازه‌گیری طول از طولیابهای الکترونیکی EDM استفاده شود ، برای محاسبهٔ انحراف معیار می‌توان




نگاره(۲) ـ یک زاویه ۴۵ درجه

| فاصله بین دوربین و نشانه | خطای محاسبه شده برای زاویه ۴۵ درجه* |
|---|---|
| 15m. | 23·5" |
| 30m. | 11·8" |
| 61m. | 66·0" |
| 122m. | 3·3" |
| 244m. | 2·1" |
| 488m. | 1·7" |
| 975m. | 1·5" |
| $\sigma_{p\&r} = \pm 1{\cdot}5"$ | $\sigma_c = \sigma_a = \pm 1{\cdot}5mm.$ |

جدول ۱ـ ازفاصله دوربین و نشانه برروی خطای مشاهدهٔ زاویه




نگاره ۳ـ پیمایش مورد بررسی

از فرمول پیشنهادی کارخانهٔ سازندهٔ آن استفاده کرد . برهمین اساس برای اولین طول مندرج درجدول(۳) مقدار $(\sigma = \pm[0.016 + 10558.56.5/10^6]$ محاسبه شده است . طولهایی که متر کشی می‌شوند عموما کوتاهترند و می‌باید خطای آنها را متناسب با طولشان در نظر گرفت . به‌عنوان مثال ، برای طولهای کوتاهتر از ۳۰ متر که برروی زمین صاف ــ البته با درنظرگرفتن دقت کافی در قرائت دو سرمتر و دانستن میزان کشش ــ با متر اندازه‌گیری می‌شوند ، می‌توان خطایی معادل ۶ میلیمتر را درنظرگرفت .

نکتهٔ گفتنی در اینجا آن است که معمولا نقاط شبکه‌های مثلث‌بندی قدیمی فاقد دقت ــ ماتریس پراش کوواریانس ــ هستند ، که ناشی از محدودیتهای محاسباتی گذشته است . این مشکل خاص کشور ما نیست و در کشورهای پیشرفته نیز به چشم می‌خورد ، مثلا سازمان نقشه‌برداری ملی آمریکا ( NGS ) اعلام داشته که درصدد انتشار دقت ایستگاههای کنترل سطح مبنای ۱۹۸۳ ، آمریکای شمالی( NAD 83 ) است . بنابراین ملاحظه می‌شود که دقت نقاط کنترل سطح مبنای جدید آمریکای شمالی هنوز اعلام نشده و در مورد سطح مبنای قدیمیتر یعنی NAD 27 اصلاً محاسباتی برای تعیین دقت صورت نگرفته بود . درچنین مواردی تنها می‌توان دقت نقاط کنترل را حدس زد . بطور کلی بهترین راه برای بدست آوردن و یا کنترل دقت نقاط شبکه‌های مثلث‌بندی، روشی است که دراینجا شرح داده می‌شود .

ابتدا مشاهدات را با حداقل کنسترین‌های لازم به‌روش کمترین مربعات سرشکن کنید . منظور از حداقل کنسترین مبداء ، مقیاس و توجیه شبکه است ، که با معلوم بودن مختصات دو نقطه و یا یک نقطه به اضافهٔ یک طول و یک آزیموت تأمین می‌گردد . با انجام این سرشکنی ، که دارای حداقل کنسترینهای لازم است ، می‌توان مشاهدات انجام شده را کنترل کرد . پس از این مرحله می‌توان با درنظر گرفتن تمام کنسترینهای موجود سرشکنی کمترین مربعات را تکرار کرد . انجام این سرشکنی موجب آشکار شدن خطای سیستماتیک مشاهدات و یا مختصات نقاط کنترل می‌گردد . در بخشهای بعد توضیحات بیشتری داده‌خواهد شد .

**کنترل اولیهٔ مشاهدات برای کشف اشتباه**

بعد از محاسبهٔ مقادیر تقریبی مختصات و تعیین انحراف معیار مشاهدات ، می‌توان مشاهدات را به‌صورت مقدماتی به‌طوری که ذکر خواهد شد برای کشف اشتباهات احتمالی کنترل کرد . این کنترل ازطریق مقایسهٔ مشاهدات با مقادیری که برای آنها به کمک مختصات محاسبه می‌شود انجام می‌پذیرد . تفاوتهای باارزمی‌تواند دال بر وجود اشتباه درمیان مشاهدات باشد . علت هر اختلاف بزرگ در این مرحله می‌باید به صورت جدی پیگیری شود ، چرا که **هیچگاه** نباید فراموش کرد که : «**بامشاهدات اشتباه ازطریق سرشکنی کمترین مربعات نمی‌توان به جوابهای درست دست یافت**» . علت آن است که اصل روش کمترین مربعات بر کمتر کردن اختلاف مشاهدات از مقادیری که برای آنها از طریق مختصات محاسبه می‌شود ــ باقیمانده‌ها ــ استواراست .

در صورت در اختیار بودن نرم افزارمناسب، کار نقشه‌بردار در این مرحله مقایسهٔ اختلافات بین مشاهدات انجام شده و مشاهدات محاسبه شده از طریق مختصات برای یافتن اشتباهات بزرگ است . اگر تفاوت فاحشی وجود داشته‌باشد، نقشه‌بردارمی‌باید علت آنرا بیابد و برطرف سازد .

جدول ۲ - زاویای اقعی اندازه گیری شده

| انحراف معیار | زاویه اندازه گیری شده | قرائت جلو | ایستگاه استقرار | قرائت عقب |
|---|---|---|---|---|
| 1·51 | 132· 45, 47·5 | 3 | 2 | 1 |
| 1·51 | 227· 14, 12·4 | 1 | 2 | 3 |
| 1·54 | 210· 29, 48·3 | 4 | 3 | 2 |
| 1·54 | 149· 30, 12·0 | 2 | 3 | 4 |
| 1·69 | 162· 23, 57·2 | 5 | 4 | 3 |
| 1·69 | 197· 36, 03·6 | 3 | 4 | 5 |
| 1·65 | 210· 06, 24·1 | 6 | 5 | 4 |
| 1·65 | 149· 53, 36·0 | 4 | 5 | 6 |
| 1·51 | 22· 18, 56·1 | 7 | 6 | 5 |
| 1·51 | 337· 41, 03·8 | 5 | 6 | 7 |
| 1·50 | 157· 42, 36·3 | 8 | 7 | 6 |
| 1·50 | 202· 17, 23·5 | 6 | 7 | 8 |
| 1·50 | 92· 37, 09·3 | 1 | 8 | 7 |
| 1·50 | 267· 22, 50·9 | 7 | 8 | 1 |

جدول ۳ - طولهای اقعی اندازه گیری شده

| انحراف معیار | طول اندازه گیری شده | به | از |
|---|---|---|---|
| 0·062 | 10,558·56 | 1 | 2 |
| 0·081 | 12,830.49 | 3 | 2 |
| 01032 | 3,168·13 | 3 | 4 |
| 0·025 | 1,795·13 | 5 | 4 |
| 0·041 | 4,963·02 | 5 | 6 |
| 0·096 | 15,893·46 | 7 | 6 |
| 0·087 | 14,098·15 | 7 | 8 |
| 0·094 | 15,615·61 | 1 | 8 |

جدول۴- کنترل اولیه برای تشخیص اشتباه

| صحت | طول محاسبه شده | طول اندازه گیری شده | به | از |
|---|---|---|---|---|
| YES | 10,556·513 | 10,556·560 | 2 | 2 |
| YES | 12,830·290 | 12,830·490 | 3 | 2 |
| YES | 3,168·078 | 3,168·130 | 3 | 4 |
| YES | 1,795·102 | 1,795·130 | 5 | 4 |
| NO | 4,957·554 | 4,963·020 | 5 | 6 |
| NO | 15,888·896 | 15,893·460 | 7 | 6 |
| YES | 14,098·080 | 14,098·150 | 7 | 8 |
| YES | 15,615·352 | 15,615·610 | 1 | 8 |

**جدول (٤)** بیانگر کنترل اولیهٔ انجام شده برای کشف اشتباهات پیمایش ذکر شده‌است. در این بررسی معیار تشخیص اشتباه بنج برابر انحراف معیار مشاهدات در نظر گرفته شده است. بدین صورت که اختلافاتی که بزرگتر از بنج برابر انحراف مشاهده بوده‌اند، دال بر اشتباه مشاهده تلقی گردیده‌اند. با توجه به **جدول (٤)** دو طول دارای اختلاف بیش از ۰/۰۵ متر هستند. بطوری که در بخش بعد خواهید دید، این اختلاف ناشی از عدم تصحیح آنها به سیستم تصویر بوده است.

**انتقال یا تصحیح مشاهدات به سیستم تصویر**

اکثر نقشه‌برداران مشاهدات انجام شده را مستقیماً بر روی سیستم تصویر **به کار می‌برند و از اصل کروی بودن زمین صرفنظر می کنند.** البته تا زمانی که **منطقهٔ نقشه‌برداری** کوچک باشد، کروی بودن مسئله‌ای را ایجاد نمی کند. اما با گسترش کار نقشه‌برداری به چندین کیلومتر یا اتصال شبکه به چند نقطهٔ شبکهٔ مثلث‌بندی سراسری، انحناء زمین بر نتایج سرشکنی اثر خواهد گذاشت. مختصاتی که برای شبکه‌های مثلث‌بندی منتشر و در اختیار نقشه‌برداران قرار می‌گیرند، تماماً در سیستم تصویر هستند. لذا اگر بناست از این مختصات استفاده گردد می‌باید تمام مشاهدات **به همان** سیستم تصویر انتقال یابند.

پیمایش نگارهٔ ۳ دارای دو نقطهٔ کنترل — نقاط شبکهٔ مثلث‌بندی — به فاصلهٔ تقریباً ۱۰ کیلومتر است. خطای بست نسبی این پیمایش ۱:۱۸۰۰۰۰۰ می‌باشد. با این همه مختصاتی که برای ایستگاه ۶ از طریق مختصات ایستگاه ۱ و مشاهدات انجام شده بدست می‌آید با مقدار داده شدهٔ آن ۰/۸ متر اختلاف دارد **(جدول شمارهٔ ۵)**. حال سئوال این است که چگونه پیمایشی که بدین خوبی بسته می‌شود می‌تواند چنین خطایی را در مختصات نقاط کنترل ایجاد کند؟ پاسخ اش ساده است « **چون مشاهدات به سیستم تصویر مختصات برده نشده‌اند** ». عدم انتقال طولها به سیستم تصویر مانند استفادهٔ از یک متر با طول بلندتر یا کوتاهتر از واقع است. این خطا سیستماتیک بوده و می‌توان آن را به‌صورت محاسباتی حذف کرد. نتیجه آنکه: « انتقال کلیهٔ مشاهدات به سیستم تصویر، خاصه در شبکه‌های با ابعاد بزرگ، قبل از سرشکنی کمترین مربعات الزامی است ».

انتقال طولها به سیستم تصویر طی دو مرحله صورت می‌گیرد. در مرحلهٔ اول طول مایل مشاهده شده به بیضوی مقایسه[7] برده شده و در مرحلهٔ دوم از بیضوی به سیستم تصویر مورد نظر انتقال می‌یابند.

انتقال طولهای مایل مشاهده شده به بیضوی مقایسه نیازمند ارتفاع بیضوی ایستگاههاست. ارتفاع بیضوی فاصلهٔ ایستگاه مورد نظر تا بیضوی مقایسه در امتداد قائم بر بیضوی است. تعیین ارتفاع بیضوی خود مستلزم دانستن ارتفاع ارتومتریک[8] وارتفاع ژئوئید ایستگاههاست.

ارتفاع بیضوی (h) = ارتفاع ارتومتریک (H) + ارتفاع ژئوئید (N)

در اکثر پروژه‌های نقشه‌برداری با تقریب نسبتاً خوبی می‌توان از ارتفاع از سطح متوسط دریا به جای ارتفاع ارتومتریک استفاده کرد (۶). ارتفاع از سطح متوسط دریا را می‌توان از نقشه‌های پوششی موجود استخراج کرد. درصورت مسطح بودن منطقه می‌توان از یک ارتفاع متوسط برای کلیهٔ ایستگاهها به‌طور مشترک استفاده کرد. ارتفاع ژئوئید — که جدایی بین بیضوی و ژئوئید در نقاط مختلف است — را در صورت استفادهٔ از بیضوی محلی مناسب (بیضوی مقایسه‌ای که سطح آن حتی‌المقدور به سطح ژئوئید در منطقه نزدیک باشد) می‌توان صفر فرض کرد. بیضوی مورد استفاده در ایران بیضوی ۵۰ ED است که جدایی آن از ژئوئید(N) **بطور متوسط در حدود ۲۰ متر است** (منبع ۱۸). بنابراین فرض صفر بودن ارتفاع ژئوئید در ایران فرضی دور از واقع است. برای تأمین ارتفاع ژئوئید مورد نیاز می‌توان از نقشه‌های ارتفاع ژئوئید حاصل از ضرایب ژئوپتانسیلی ماهواره‌ای استفاده کرد، که هر چند نشان دهندهٔ طول موجهای بلند ژئوئید هستند ولی برای این منظور دارای دقت کافی می‌باشند. در عمل حتی می‌توان میانگین ارتفاع ژئوئید منطقه را بطور یکسان برای کلیهٔ ایستگاهها بکار برد. مراحل انتقال مشاهدات به سیستم تصویر را با تمام جزئیات می‌توان در منابع ۱۲، ۹، یافت.

**جدول ۹** مقادیر طولهای پیمایش نگارهٔ ۳ را پس از انتقال به سیستم تصویر نشان می‌دهد. در این مثال چون از سیستم تصویر مخروطی استفاده شده و گسترش پیمایش شرقی — غربی است، ضریب انتقال طولها از بیضوی به سیستم تصویر برای همهٔ طولها تقریباً مساوی و نزدیک به یک است. در سیستم تصویر مخروطی بیشترین تغییرات این ضریب، که به آن اصطلاحاً ضریب مقیاس اطلاق می‌گردد، در امتداد شمال — جنوب است. در انتقال طولهای پیمایش نگارهٔ ۳ به سیستم تصویر ارتفاع از سطح دریا برای تمام ایستگاهها ۸۵۰ متر و ارتفاع ژئوئید برابر صفر فرض گردیده‌است.

علاوه بر طولها، زوایا، آزیموت‌ها و امتدادها نیز می‌باید به سیستم تصویر آورده شوند. در این موارد نیز انتقال مشاهدات به سیستم تصویر، مانند آنچه که در مورد طولها گفته شد، در طی دو مرحله صورت می‌گیرد: انتقال مشاهدات از سطح زمین به بیضوی مقایسه و انتقال از بیضوی مقایسه به سیستم تصویر. در مورد جزئیات مربوط به اعمال این تصحیحات نیز می‌توانید به منابع ۱۲، و ۹، مراجعه کنید.

**سرشکنی کمترین مربعات با حداقل کنسترین[1]**

ازآنجا که دقت نقاط شبکهٔ مثلث بندی (نقاط کنترل) معمولاً تا معلوم است، می‌باید سرشکنی را در دو مرحله انجام داد. برای بررسی دقت مشاهدات، ابتدا شبکه را با حداقل کنسترین های لازم سرشکن کرده، سپس کلیهٔ کنسترین های موجود را در نظر گرفته، شبکه را مجدداً سرشکن می نمائیم.

**جدول ۵ ـ مقایسهٔ مختصات اولیه با مختصات محاسبه شده (درمورد نقاط شبکهٔ مثلث بندی)**

| IRAN | مختصات محاسبه شده | | مختصات اولیه | |
|---|---|---|---|---|
| Station | Northing | Easting | Northing | Easting |
| 1 | 390,866·56 | 2,157,683·55 | 390,866·56 | 2,157,683·55 |
| 6 | 391,067·37 | 2,188,713·42 | 391,067·33 | 2,188,707·41 |

جدول ۶ طولهای بر روی سیستم تصویر

| از | به | طول اندازه گیری شده | ضریب مقیاس | طول روی سیستم تصویر |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 10,558·56 | 0·99981662 | 10,556·624 |
| 2 | 3 | 12,830.49 | 0·99981643 | 12,828·135 |
| 4 | 3 | 3,168·13 | 0·99981569 | 3,167·546 |
| 4 | 5 | 1,795·13 | 0·99981569 | 1,794·799 |
| 6 | 5 | 4,963·02 | 0·99981586 | 4,962.106 |
| 6 | 7 | 15,893·46 | 0·99981477 | 15,890·516 |
| 8 | 7 | 14,098·15 | 0·99981283 | 14,095·511 |
| 8 | 1 | 15,615·61 | 0·99981430 | 15,612·710 |

جدول ۷ طولهای سرشکن شده

| از | به | طول | باقیمانده | باقیمانده استاندارد شده | عدد آزادی |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 10,556·614 | −0·010 | −0·399 | 0·2375 |
| 2 | 3 | 12,828·123 | −0·012 | −0·328 | 0·2055 |
| 4 | 3 | 3,167·544 | −0·002 | −0·382 | 0·0344 |
| 4 | 5 | 1,794·798 | −0·001 | −0·355 | 0·0215 |
| 6 | 5 | 4,962·102 | −0·004 | −0·396 | 0·0510 |
| 6 | 7 | 15,890·517 | 0·001 | 0405 | 0·0123 |
| 8 | 7 | 14,095·528 | 0·016 | 0·396 | 0·2297 |
| 8 | 1 | 15,612·715 | 0·004 | 0·128 | 0·2297 |

جدول ۸ – زاویه های سرشکن شده

| از | ایستگاه استقرار | به | زاویه | باقیمانده | باقیمانده استاندارد شده | عدد آزادی |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 132· 45, 47·5 | 0·0 | 0·017 | 0·5227 |
| 3 | 2 | 1 | 227· 14, 12·5 | 0·1 | 0·076 | 0·5227 |
| 2 | 3 | 4 | 210· 29, 48·2 | −0·1 | −0·081 | 0·5613 |
| 4 | 3 | 2 | 149· 30, 11·8 | −0·2 | −0·277 | 0·5613 |
| 3 | 4 | 5 | 162· 23, 57·4 | 0·2 | 0·230 | 0·5973 |
| 5 | 4 | 3 | 197·· 36, 02·6 | 0·0 | 0·024 | 0·5973 |
| 4 | 5 | 6 | 210· 06, 24·1 | 0·0 | 0·020 | 0·6061 |
| 6 | 5 | 4 | 149· 53, 35·9 | −0·1 | −0·096 | 0·6061 |
| 5 | 6 | 7 | 22· 18, 56·2 | 0·1 | 0·086 | 0·6264 |
| 7 | 6 | 5 | 337· 41, 03·8 | −0·0 | −0·001 | 0·6264 |
| 6 | 7 | 8 | 157· 42, 36·6 | 0·3 | 0·223 | 0·5800 |
| 8 | 7 | 6 | 202· 17, 23·4 | −0·1 | −0·047 | 0·5800 |
| 7 | 8 | 1 | 92· 37, 09·4 | 0·1 | 0·074 | 0·5953 |
| 1 | 8 | 7 | 267· 22, 50·6 | −0·3 | −0·245 | 0·5953 |

برای تأمین حداقل کنسترین ، یک ایستگاه کنترل و آزیموت یک امتداد را ثابت فرض می کنیم . مقیاس شبکه ازطریق طولهای مشاهده شده تأمین می‌گردد. در صورت در اختیار نداشتن مختصات و آزیموت معلوم می توان مقداری دلخواه برای آنها درنظرگرفت . به این ترتیب تنها مشاهدات خواهند بود که منشاء اثر بردفت هندسی شبکه‌اند . وجود نقاط کنترل اضافی در شبکه به هنگام سرشکنی باعث تحمیل خطا بر مشاهدات و از بین رفتن امکان یافتن خطاهای سیستماتیک مشاهدات می‌گردد.

بعد از انجام سرشکنی با حداقل کنسترین و کنترل مشاهدات می توان سرشکنی را با تمام کنسترین های موجود انجام داد. برای روشن شدن لزوم انجام این دو سرشکنی مثال نگارهٔ ۳ را بار دیگر درنظر می‌گیریم . اگر خطای سیستماتیک عدم انتقال مشاهدات به سیستم تصویر برطرف نگردد ، مسلماً ناسازگاری زیادی بین مختصاتی که برای نقطهٔ کنترل دوم از طریق سرشکنی بدست می‌آید با مقدار معلوم آن ایجاد خواهد کرد . بعلاوه احتمال دارد که مختصات معلوم نقاط کنترل نیز دارای اشکالاتی باشند . پس اگر مشاهدات و کلیهٔ نقاط کنترل با مختصات معلوم را در یک سرشکنی به‌صورت یکجا وارد کنیم ، از آنجا که معمولاً به‌نقاط کنترل وزن بالایی داده می‌شود ، امکان تفکیک خطاهای مشاهدات از خطای مختصات نقاط کنترل میسر نخواهد بود .

*

**تعیین اشتباهات بعد از سرشکنی**

ورود اشتباه به مشاهدات در کلیهٔ مراحل از جمع آوری تا پردازش اطلاعات امکان پذیر است . برای انجام سرشکنی درست و یافتن جواب های نهایی ، لازم است باقیمانده‌های حاصل از سرشکنی مقدماتی از نظر وجود اشتباهات یا خطاهای سیستماتیک مورد بررسی قرار گیرند. منظور از سرشکنی مقدماتی ، سرشکنی‌ای است که با حداقل کنسترین صورت گیرد.

براساس نظریهٔ خطاهای اتفاقی ، تعداد باقیمانده‌های با مقدار کوچک می‌باید بیشتر از تعداد باقیمانده‌های بزرگ باشد . به‌علاوه ، می‌باید تعداد باقیمانده‌های منفی و مثبت با هم برابر باشند . بنابراین ، اگر در یک سرشکنی اکثر باقیمانده‌های یک نوع مشاهده ، مثبت یا منفی باشند ، احتمال وجود خطای سیستماتیک در آن مشاهده وجود دارد . در چنین وضعیتی ، مثلا هنگامی که خطاهای سیستماتیک به‌درستی تصحیح نشده باشند پیش می‌آید . به همین ترتیب داشتن یك باقیماندهٔ نسبتاً بزرگ در بین باقیمانده‌ها می تواند دال بر اشتباه بودن آن مشاهده باشد .

اساس سرشکنی کمترین مربعات به‌گونه‌ای است ، که باعث توزیع خطای یک مشاهده بر روی مشاهدات مجاور آن می‌گردد . بنابراین مشخص ساختن یک مشاهدهٔ اشتباه در میان مشاهدات دیگر ، با بررسی باقیمانده‌ها به تنهایی بسیار **مشکل وچه بسا غیرممکن خواهد بود.** استفاده از روش کمترین مربعات برای کشف اشتباه نخستین بار توسط باردا[9] در سال ۱۹۶۷ ، مطرح گردید (۲) . و از آن تاریخ به بعد مقالات عدیده‌ای در مورد اصول ریاضی کشف اشتباه منتشر گردید . نظریهٔ کشف اشتباه از حوصلهٔ این مقاله بیرون است و تنها به ذکر نحوهٔ عملی استفادهٔ از آن بسنده می‌شود.

کشف اشتباه با بررسی عدد آزادی[10] و باقیمانده‌های استاندارد شدهٔ مشاهدات، عملی می‌گردد . نظراً می توان گفت که عدد آزادی یک مشاهده عددی بین صفر و یک است . مقدار صفر به معنای عدم وجود اطمینان یا کنترل محاسباتی می‌باشد . چنین وضعیتی مثلا در مورد مشاهدهٔ آنتنی به سوی یک ایستگاه مجهول پیش می‌آید. هر قدر عدد آزادی بزرگتر باشد اطمینان ما به مشاهدات بیشتر خواهد شد . در ایجاد شبکهٔ مستحکم توصیه می‌شود که شکل هندسی شبکه به‌گونه‌ای طرح‌شود که عدد آزادی مشاهدات تقریبا با هم برابر و بزرگتر از ۰/۵ باشد . چون داشتن مشاهدات با عدد آزادی کوچک به معنای کنترل محاسباتی ضعیف؛ و وجود مشاهدات با عدد آزادی متفاوت امکان مخفی شدن اشتباهات را در میان مشاهدات با عدد آزادی کوچکتر پدید می‌آورد ، مشاهدهٔ با عدد آزادی کوچک دارای باقیماندهٔ کوچک خواهد بود ، حتی اگر دارای خطای بزرگی باشد .

عدد آزادی را می توان با استفاده از رابطهٔ زیر بدست آورد .

$$Rd = ( 1 - c_v p_1 ) \quad \cdots \quad (۶)$$

که در آن :

$C_v$ ماتریس براش — کوواریانس باقیمانده‌ها ،

$P_1$ ماتریس وزن مشاهدات ،

$I$ ماتریس یکه ؛ و

$Rd$ ماتریس مربع است ، که عناصر قطر اصلی آنرا عدد آزادی مشاهدات تشکیل می دهد .

باقیمانده‌های استاندارد شده ، اعدادی هستند بدون واحد که از رابطهٔ زیر بدست می‌آیند.

$$\hat{r}_i^* = \hat{r}_i / \hat{\sigma}_{\hat{r}_i} \quad \cdots \quad (۷)$$

در رابطهٔ فوق

$\hat{r}_i^*$ باقیماندهٔ استاندارد شدهٔ i امین مشاهده ،

$\hat{r}_i$ باقیماندهٔ برآورد شدهٔ i امین مشاهده و

$\hat{\sigma}_{\hat{r}_i}$ انحراف معیار برآورد شدهٔ i امین مشاهده است.

باقیمانده‌های استاندارد شده بر خلاف باقیمانده‌های معمولی همگی دارای تابع توزیع احتمال یکسانی هستند ، و آنها را می توان در سطح آزمون مورد نظر برای تشخیص باقیمانده‌های اشتباه آزمود .

$$\hat{r}_i^* = | \hat{r}_i / \hat{\sigma}_{\hat{r}_i} | < n_{1-\alpha/2}(0,1) \cdots (۸) \quad (\sigma_0^2 \text{ درصورت معلوم بودن})$$

$$\hat{\tau}_i^* = | \hat{r}_i / \hat{\sigma}_{\hat{r}_i} | < \tau_{\nu,1-\alpha/2} \cdots (۹) \quad (\sigma_0^2 \text{ درصورت نامعلوم بودن})$$

$\alpha$ سطح آزمون انتخابی ،

$n_{1-\alpha/2}$ تابع توزیع احتمال نرمال ؛ و

$\tau_\nu$ تابع توزیع احتمال تاو[11] با $\nu$ درجهٔ آزادی است.

● ●

در صورتی که درجهٔ آزادی شبکه بزرگ باشد، در کاربردهای عملی می‌توان به‌جای $\tau_\nu$ ، تابع توزیع استیودنت[12] و یا تابع توزیع نرمال را به کاربرد ( ۲۰ ) .

در آزمون فوق هر باقیمانده به تنهایی ، وجدای از سایر باقیمانده‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نظراً هر مشاهده‌ای که دارای باقیماندهٔ استاندارد بزرگتر از حد مجاز باشد ( در آزمون رد شود) اشتباه محسوب می‌گردد . اگر تنها یک باقیماندهٔ استاندارد بزرگتر از حد تعیین شده باشد ، آن مشاهده به احتمال زیاد اشتباه است .

اگر ، چند باقیماندهٔ استاندارد بزرگتر از حد مجاز باشند ( در آزمون رد شوند ) در این صورت نمی توان با قاطعیت اعلام داشت که همهٔ مشاهدات اشتباه‌اند (۱). در اینگونه موارد برای تعیین مشاهدهٔ اشتباه باید به‌صورت زیر عمل کرد .

● مشاهدهٔ با بزرگترین باقیماندهٔ استاندارد را بیابید و از فهرست مشاهدات حذف کنید.

● سرشکنی را تکرار کنید . مجدداً باقیمانده‌های استاندارد شده را برای کشف اشتباه بررسی کنید و به صورت ذکر شده بیازمایید.

● اگر، چند باقیماندهٔ استاندارد بزرگ مشاهده شد، بزرگترین را حذف کرده سرشکنی را تکرار کنید.

● مراحل فوق را آنقدر تکرار کنید، تا تمام باقیمانده‌ها در آزمون پذیرفته شوند.

● حال اولین مشاهدهٔ حذف شده را وارد کنید ، سپس سرشکنی را تکرار کرده و باقیمانده‌های استاندارد شده را به دست آورید.

● در صورت کوچک بودن باقیماندهٔ این مشاهده ، آنرا در فهرست مشاهدات باقی گذارید.

● این عمل را برای کلیهٔ مشاهدات حذف شده، پی در پی انجام دهید.

● هر مشاهده‌ای که وارد ساختن آن باعث افزایش مقدار باقیمانده‌های استاندارد شده گردد ، اشتباه است . و می باید حذف شود یا دوباره مشاهده شود .

● هنگامی که تمام مشاهدات اشتباه حذف شده و کلیهٔ باقیمانده‌های استاندارد زیر حد مجاز قرار گرفتند (در آزمون رد نشدند ) می توان سرشکنی اولیه را کامل فرض کرد.

● برای آنکه استحکام شبکه به خاطر حذف مشاهدات اشتباه آسیب نبیند مشاهدات حذف شده را دوباره مشاهده کرده ، و در شبکه وارد کنید . یا حتی در صورت لزوم مشاهدات جدید را نیز به مشاهدات قبلی بیافزایید.

این روش کشف اشتباه به وزن نسبی بین مشاهدات ناهمچنس حساس است . به عنوان مثال اگر وزن زاویه ها خیلی بیشتر از طولها در نظر گرفته شود ، می توانه به نزدیک شدن طولها به مرز رد شدن منجر شود . بنابراین ، لزوم انتخاب وزنهای صحیح برای مشاهدات مورد تأکید قرار می گیرد.

هنگامی که مشاهدات عاری از هرگونه اشتباه تشخیص پذیر شدند ، پراش وزن واحد ( $\hat{\sigma}_0^2$ ) را نیز مورد بررسی قرار می دهیم . از نظر آماری می باید مقدار آن نزدیک به مقدار اولیه یعنی $\hat{\sigma}_0^2$ باشد . همانطور که در ابتدای مقاله نیز اشاره شد ، غالباً $\hat{\sigma}_0^2$ (صورت کسر فرمول ( ۱ ) ) مساوی واحد فرض می شود . بنابراین ، بعد از سرشکنی مقدار برآورد شدهٔ آن نیز می باید نزدیک یک باشد . میزان تفاوت $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ با یک را می توان از طریق آزمون $\chi^2$ [13] مورد بررسی قرار داد . اگر $\hat{\sigma}_0^2$ خیلی کوچک یا بزرگ باشد ، وزن مشاهدات را تصحیح کنید و سرشکنی را تکرار کنید . مقدار خیلی بزرگ $\hat{\sigma}_0^2$ بیانگر بزرگ بودن بیش از حد وزن مشاهدات است ، پس می باید وزن مشاهدات را کاهش داد ، و برعکس در صورت کوچک بودن مقدار $\hat{\sigma}_0^2$ می باید وزنها را افزایش داد.

برای پیمایش نگارهٔ ۳ نیز سرشکنی کمترین مربعات با حداقل کنسترین ترتیب داده شد . کنسترین های مورد استفاده مختصات ایستگاه ۱ و آزیموت ایستگاه ۱ به ۶ بودند . جدولهای ۷ و ۸ حاوی مشاهدات سرشکن شده و باقیمانده‌های برآورد شدهٔ آنها هستند . همانگونه که ملاحظه می شود باقیمانده‌های طولهای بلند توزیع علامت صحیحی ندارند . با توجه به قوانین احتمالات باقیمانده‌های با علامت مثبت و منفی باید به تعداد برابر وجود داشته باشند . توزیع نامساوی علامت بین باقیمانده‌ها می تواند ناشی از اشکال در تصحیح مشاهدات یا به عبارت دیگر وجود خطای سیستماتیک باشد . بدین خاطر در صورت بروز چنین مسئله‌ای بررسی مشاهدات جهت یافتن خطاهای سیستماتیک احتمالی ، موکداً توصیه می گردد.

در این مثال توزیع نامساوی علامت به خاطر خطایی است که عمداً برای بررسی اثر آن به X ایستگاه ۶ اعمال کرده‌ایم ، که اثر آن به صورت خطا بر روی طولها ظاهر گردیده است ، چرا که کشیدگی پیمایش تقریباً شرقی — غربی است . باید توجه داشت که توزیع علامت در بین باقیمانده‌های یک پیمایش ساده ممکن است به صورتهای کاملا غیر قابل پیش بینی بروز کند ، که ناشی از حداقل بودن کنترل هندسی پیمایش ( کم بودن درجهٔ آزادی آن ) است . بنابراین ، مطالبی که در اینجا گفته می شود بیشتر در مورد شبکه های مترا کم — با درجهٔ آزادی بالا — مصداق دارد.

در سرشکنی مثال مورد بحث حد تشخیص اشتباه — براساس آزمون آماری ۰/۰۵ در نظر گرفته شده است . با توجه به ستون باقیمانده‌های استاندارد شدهٔ طولها و زاویه ها هیچگونه مشاهدهٔ اشتباه به چشم نمی خورد.

پس از آنکه سرشکنی عاری از هرگونه اشتباه قابل تشخیص گردید ، می توان کلیهٔ کنسترین های موجود را وارد سرشکنی ساخت . در این مرحله تمام نقاط کنترل موجود وارد سرشکنی می گردند . اکنون اگر اشتباهی ملاحظه شود ، می تواند معلول یکی از دو علت زیر باشد :

۱ — مختصات نقاط کنترل مربوط به محل فیزیکی نقاط بر روی زمین نیستند.

۲ — مشاهدات هنوز دارای اشتباه کشف نشده‌اند . به عنوان مثال اگر بازوهایی که پیمایش را به ایستگاههای کنترل متصل می کنند ، با طولیاب کالیبره نشده اندازه‌گیری شوند ( یعنی طول اندازه‌گیری شده بزرگتر یا کوچکتر از واقع باشد ) چنین وضعیتی پیش خواهد آمد . اثر این خطا هنگامی که بیش از یک نقطهٔ کنترل در شبکه وارد می گردد مشهودتر خواهد بود . اشکالاتی از این دست باعث بروز وضعیت غیرعادی در باقیمانده‌های مختصات نقاط کنترل یا مشاهدات خواهند شد.

در اینگونه موارد نقشه بردار می تواند دو کار انجام دهد :

۱ ) بررسی مشاهدات از نظر وجود خطاهای سیستماتیک.

۲ ) کاهش وزن مختصات نقاط کنترل . اگر هیچگونه اثر سیستماتیک در مشاهدات مشاهده نگردد ، می باید با وزن نقاط کنترل را کاهش داد و یا بعضی از آنها را حذف کرد.

بعد از حذف کردن این خطاها ، سرشکنی کمترین مربعات کامل خواهد بود. گفتنی است در صورت ضعیف بودن کنترل شبکه ( کم بودن درجهٔ آزادی) نقشه بردار می باید از تجربهٔ شخصی خود سود جوید . مسئلهٔ بسیار مهم در اینجا در اختیار داشتن دقت صحیح نقاط کنترل ( یعنی ماتریس پراش — کوواریانس نقاط کنترل) است ، چرا که بدون دسترسی به چنین اطلاعاتی همواره وارد ساختن نقاط کنترل اضافه بر حداقل مورد نیاز ، به شبکه ، می تواند مشکل آفرین باشد.

## نتیجه گیری

مراحل سرشکنی کمترین مربعات را می توان به صورت زیر خلاصه کرد.

۱ ) محاسبهٔ مقادیر تقریبی (اولیهٔ) مختصات.

۲ ) تعیین انحراف معیار مشاهدات.

۳ ) کنترل مشاهدات از نظر وجود اشتباه.

۴ ) انتقال مشاهدات به سیستم تصویر.

۵ ) انجام سرشکنی کمترین مربعات با حداقل کنسترین.

۶ ) حذف یا تصحیح مشاهداتی که اشتباه به نظر می رسند . این تصحیح ممکن است نیازمند تکرار مشاهدهٔ صحرایی باشد.

۷ ) تکرار مراحل ۵ و ۶ تا حذف کلیهٔ مشاهدات با باقیمانده‌های بزرگ خارج از سطح آزمون.

۸) افزودن کلیه کنسترین های موجود به شبکه و تکرار سرشکنی کمترین مربعات.

۹) بررسی سرشکنی مرحلهٔ (۸) از نظر وجود اشتباه یا خطای سیستماتیک در مشاهدات یا نقاط کنترل. مشخص ساختن خطای سیستماتیک احتمالی مشاهدات و حذف آن، و یا در صورت عدم رؤیت خطای سیستماتیک بین مشاهدات، کاهش وزن نقاط کنترل و یا حذف نقاط کنترل دارای اشکال.

مراحل ذکر شده ممکن است ظاهراً طولانی و وقت گیر جلوه کنند، اما نباید فراموش کرد که ما در عصری زندگی می کنیم که میکرو کامپیوترها به آسانی در اختیار همگان قرار داشته و به علاوه نرم افزارهای مناسبی وجود دارند، که کلیه مراحل ذکر شده را به صورت خود کار و در ظرف چند ثانیه انجام می دهند. برای نمونه می توان از نرم افزاری که به وسیلهٔ نویسنده ایجاد گردیده است نام برد. در صورت استفاده از این نرم افزار — که به راحتی از طریق سازمان جغرافیایی در اختیار متقاضیان قرار می گیرد — تنها وظیفهٔ نقشه بردار، محاسبهٔ مختصات تقریبی و انجام پاره‌ای تصحیحات است.

1 ) Constrain
2 ) Inner Consistancy
3 ) Centring Error
4 ) Mikhail
5 ) Gracie
6 ) Buckner
7 ) Reference Ellipsoid
8 ) Othometric Height
9 ) Baarda
10 ) Redundancy Number
11 ) Tau pdf
12 ) Student's t pdf
13 ) Chi Squared pdf


1 )Amer, F. 1979. "Theoretical Reliability Studies for Some Elementary Photogrammetric Procedures." Aerial Triangulation Symposium, Department of Surveying, Queensland, Australia.

2 ) Baarda, W. 1967. Statistical concepts in Geodesy, new series, vol. 2, no. 4. Delft: Netherlands Geodetic Committee.

3 ) Baarda, W. 1968. A Testing Procedure for use in Geodetic Networks, new series, vol. 2, no. 5. Delft: Netherlands Geodetic Committee.

4 ) Buckner, R. B. 1983. Surveying Measurements and their Analysis. Rancho cordova, California, Landmark Enterprises.

5 ) El – Hakim, S. F. 1981. "A Practical Study of Gross –Error Detection in Bundle Adjustment." The Canadian Surveyor, vol. 35, no. 4, PP. 373 – 386.

۶) آزموده اردلان علیرضا. تعیین ارتفاع ارتومتریک با استفاده از G.P.S. سپهر نشریهٔ علمی فنی سازمان جغرافیایی دورهٔ اول شمارهٔ اول بهار ۱۳۶۹، ص ۳۸ – ۴۲

7 ) Draper, N. R., and H. Smith. 1981. Applied Regression Analysis. New York: John Wiley Sons.

8 ) Krohn, David K. 1988. "Weighting Angles.

9 ) Mikhail, Edward M. 1976. Observtions and Least Squares. Washington, D. C.: University Press of America Inc.

10) Mikhail, Edward M., and Gordon Gracie. 1981. Analysis and Adjustment of Survey Measurements. New York: Van Nostrand Reinhold Company.

11) Shrestha, Ramesh L. 1989. "NAD 83 Geodetic and State Plane Coordinatea Computations." Surveying and Mapping, vol. 49, no. 2, PP. 87 – 93.

12) Sten, James E. 1989. State Plane Coordinate System of 1983, NOAA Manual NOS NGS 5. Rockville, Maryland: U. S. Department of Commerce.

13) Stroughton, Herbert W. 1977. Papers from the 1977 ACSM Fall Technical Meeting.

14) Vincenty, T. 1989. "The Flat Earth Concepts in Local Surveys." Surveying and Mapping, vol. 49, no. 2, PP. 101 – 102.

15) White, L. A. 1987. Calculus of Observations 380/580 Department of Surveying and Mapping, western Australia Institute of Technology.

16) Wolf, paul R. 1989 Elementary Surveying, Eighth edition. New York, Harper & Row Publishers.

17) Wolf, paul R. 1987. Adjustment Computations: Practical Least Squares for Surveyors, Second edition. Rancho Cordova, California: Landmark Enterprises.

18) Weber G. and Zomorrodian H. "Regional Geopotential Model Improvement for The Iranian Geoid Determination." Bull. Geod. 62 (1988) PP. 125 – 141

19) Edward J. Krakiwisky. "Conformal projections in Geodesy." Department of Surveying Eng. UNB. LN 37.

20) Edward J. Krakiwisky. "Papers for the CISM Adjustment and Analysis Seminars. The Canadian Institute of Surveying and Mapping.