



ریاضی رنگین کمان

مریم شفیعی

مدرس انجمن ریاضی پژوهش سرای دانش آموزی محمدبن زکریای رازی

دکتر زهرا ارزجانی

استادیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز

چکیده

در این مقاله، اینکه «چرا رنگین کمان را فقط بین زوایای 40° تا 42° درجه در یک قطره کروی آب می‌توان دید»، مورد بررسی قرار گرفته است. وقتی یک شعاع نور خورشید از هوا وارد قطره آب می‌شود، مقداری از نور روی قطره بازتاب می‌کند، مقداری بعد از ورود به قطره از پشت آن خارج می‌شود و مقداری از نور درون قطره طبق قانون اسنل شکست خورده و از قطره خارج می‌شود و تشکیل رنگین کمان می‌دهد.

در تشکیل رنگین کمان دو عامل اصلی، ضریب شکست نور و طول موج نقش مهمی دارند که علت تشکیل رنگ‌های مختلف در رنگین کمان می‌باشد. هر قطره آب می‌تواند یک رنگ از رنگ‌های رنگین کمان را در محدوده دید انسان ایجاد کند. سپس علت کمائی بودن رنگین کمان بیان شده است.

بعد از بررسی و اثبات فرمول‌های ریاضی به این نتیجه می‌رسیم که شدت نور خروجی در تمام زوایا یکسان نیست و بیشتر نور رنگینی که از قطره بیرون می‌رود، با جهت تابش خورشید، زاویه حدود 42° درجه می‌سازد. البته این زاویه، بستگی به رنگ پرتو دارد و بین زاویه 40° تا 42° درجه برای رنگ‌های قرمز تا بنفش متفاوت است.

واژه‌های کلیدی: رنگین کمان، ریاضی، قانون اسنل، طول موج، شکست نور.

مقدمه

بی‌تردید یکی از نمایش‌های نور در آسمان، رنگین کمان است که نور خورشید توسط قطرات باران به رنگ‌های خودش منتشر می‌شود و به چشم بیننده می‌رسد.

رنگین کمان یکی از زیباترین پدیده‌های جوئی است که می‌توان در روزهای بارانی منتظر آن بود. این پدیده هنگامی روی می‌دهد که پرتوهای سفیدرنگ خورشید در ارتفاع بالا به قطرات کروی شکل باران برخورد می‌کنند و با تجزیه به طیف‌های نور مرئی (همان اتفاقی که در منشور روی می‌دهد) و بازتاب درون قطره، از آن خارج می‌شوند.

البته معروف است که رنگین کمان ۷ رنگ دارد، درحالی‌که این، اشتباهی تاریخی است. وقتی آیزاک نیوتن^۱ برای نخستین بار، پرتوهای خورشید را از درون منشور عبور داد و طیف تجزیه شده نور را بدست آورد، همین شش رنگ را دید؛ اما از آنجاکه در آن روزگار ۷ عدد مقدسی بود، ترجیح داد رنگ نیلی را بین بنفش و آبی قرار دهد و با هفت رنگ ساختن طیف نور، توجه

عمومی بیشتری را متوجه این پدیده سازد! (www.youtube.com)

رنگین کمان وجود خارجی ندارد؛ یعنی ما نمی‌توانیم رنگین‌کمانی را بگیریم، یا پرده‌ای برای نمایش آن برپا کنیم، یا در محل آن فیلم عکاسی قرار دهیم و اثرش را روی فیلم ثبت کنیم. هر قدر تلاش کنیم به رنگین کمان نزدیک شویم، رنگین کمان نیز به همان اندازه از ما دورتر می‌شود و همیشه در فاصله‌ای ثابت از ما باقی می‌ماند. به همین دلیل است که تاکنون کسی موفق نشده است رنگین‌کمان را به دام بباندازد.

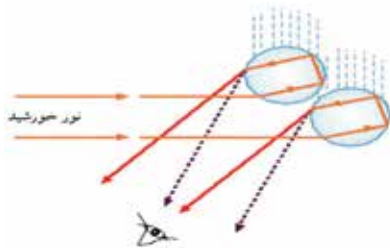
اولین بار رنه دکارت^۲ آزمایشی انجام داد که یک کمان بزرگ بسازد او سه اصل را در نظر گرفت:

۱- فقط هنگام تشکیل باران رنگین کمان بوجود نمی‌آید و هر جا که قطرات ریزآب باشد می‌توانیم رنگین کمان تشکیل دهیم.

۲- قطرات بطور تقریبی گرد و کروی هستند.

۳- کوچکتر یا بزرگتر بودن قطره‌ها تأثیری در ظاهر رنگین کمان ندارد.

وقتی که نور با قطره کروی آب برخورد می‌کند، مقداری از آن نور بازتاب می‌کند و بقیه آن شکست خورده در طول قطره حرکت می‌کند تا به سطح خمیده داخلی و آینه مانند قطره برخورد کند. در هر برخورد با سطح داخلی قطره، مقداری از نور باز می‌تابد و در قطره می‌ماند، و باقیمانده آن خارج می‌شود. بنابراین پرتوهای نور می‌توانند بعد از یک، دو، سه بازتاب داخلی یا بیشتر با شکست دیگری از قطره خارج شوند. با وجود این، نوری که به پشت قطره برخورد می‌کند دستخوش بازتاب کلی نمی‌شود و مقداری از نور از پشت قطره خارج می‌شود. اما نور خروجی از پشت قطره باران رنگین کمان تشکیل نمی‌دهد، زیرا طیف تابشی از پشت قطره مانند رنگین کمان مرئی دارای شرایط تشکیل رنگین کمان نیست و از این رو رنگ‌ها بیشتر از آنکه رنگین کمان تشکیل دهند با هم ترکیب می‌شوند. (H. Nussenzveig 1977)

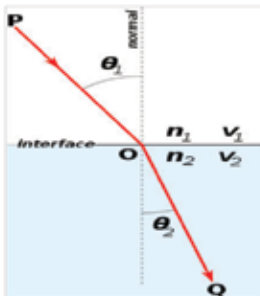


نگاره ۱- شکل فرضی پرتو نور تابیده شده به قطره



می‌کند و به اصطلاح می‌شکند. (www.tebyan.net شکست نور)

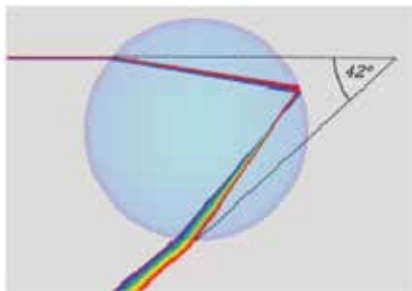
ویلبرورد اسنل^۲ در قانون شکست خود محاسبه کرد که نور چگونه زمانی که از یک محیط به محیط دیگری که چگالی متفاوتی دارد، گذر می‌کند، خم یا پراکنده می‌شود. (مانند گذر نور از هوا به محیط آب) در واقع این قانون رابطه میان زاویه نور را قبل از برخورد و پس از شکست در خط فاصل دو محیط نشان می‌دهد. (fa.wikipedia.org قانون اسنل)



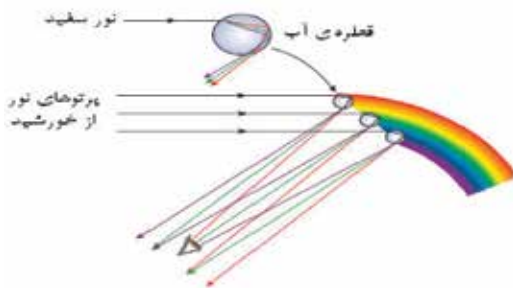
$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

نگاره ۳- قانون شکست اسنل

زمانی که مسیر پرتو نور درون قطره آب را برای نورهای قرمز و بنفش بررسی می‌کنیم، درمی‌یابیم زاویه انحراف برای این دو رنگ متفاوت است. زیرا نور بنفش که طول موج کوتاهتری دارد با زاویه بزرگتری نسبت به نور قرمز می‌شکند و در هنگام ترک قطره بواسطه بازتاب پرتوهای نورا ز پشت قطره، نور بنفش نسبت به نور قرمز با زاویه کمتری نسبت به نور سفید تابیده شده اصلی می‌چرخد و به چشم ناظر می‌رسد. به همین علت بالای رنگین کمان قرمز و پائین آن بنفش دیده می‌شود. (*C. Boyer, 1987*)



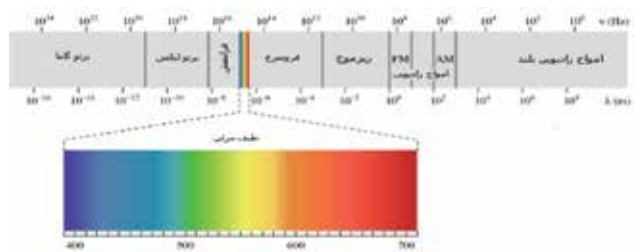
نگاره ۴- شکست نور قرمز تا بنفش



نگاره ۵- نمایش رنگ‌های رنگین کمان توسط قطرات کروی آب

در حقیقت رنگین کمان طیف پیوسته ای از تمامی رنگ‌ها را از بنفش تا قرمز در گستره دید انسان در برمی‌گیرد. رنگ‌های رنگین کمان ناشی از دو واقعیت اساسی است:

اول اینکه پرتو نور خورشید متشکل از دامنه همه رنگ‌های قابل دید در گستره بینایی انسان می‌باشد. رنگ‌های نور خورشید زمانی که با یکدیگر ترکیب می‌گردند سفید به نظر می‌رسند. این خاصیت نور خورشید نخستین بار توسط آیزاک نیوتن در سال ۱۶۶۶ تشریح گردید. طیف مرئی نام بخشی از طیف الکترومغناطیسی است که با چشم انسان قابل رؤیت و تشخیص است. طول موج طیف مرئی بین ۳۸۰ تا ۷۵۰ نانومتر و فرکانس آن‌ها بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ تراهرتز^۳ است. (سگل، موکول، ۱۳۷۱)



نگاره ۲- طول موج مرئی بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ تراهرتز

و نکته دیگر اینکه نور رنگ‌های مختلف زمانی که از یک حائل مانند هوا به محیط دیگری مانند آب یا شیشه عبور می‌کنند، به میزان متفاوتی انتشار می‌یابند. ما رنگین کمان‌های مختلفی داریم شامل:

رنگین کمان دو گانه: که در اثر دو بازتاب و دو شکست در قطره آب ایجاد می‌شود و باعث می‌گردد دو کمان ایجاد شود که کمان اول رنگش عکس کمان بعدی است.

رنگین کمان با کمان‌های اضافه: که وقتی نورها خارج می‌شوند اگر با هم تداخل داشته باشند بر اساس اینکه تداخل‌ها سازنده یا ویرانگر باشند یک سری کمان‌های اضافه که ممکن است خود رنگ‌های رنگین کمان نباشند بوجود می‌آید.

رنگین کمان قمری: که ماه کامل نور کافی برای تشکیل رنگین کمان دارد و رنگین کمان قمری بوجود می‌آورد ولی چون نور ماه از خورشید خیلی کمتر است نور رنگین کمان هم کمتر است. (*Jearl Walker, 1980*)

بحث و نتیجه‌گیری

یک رنگین کمان در واقع در محل مشخصی از آسمان وجود ندارد. محل ظاهر شدنش به محل ناظر و موقعیت خورشید بستگی دارد. تمام قطرات باران نور خورشید را یکسان شکسته و باز می‌تابانند، اما فقط نور از بعضی از قطرات باران به چشم ناظر می‌رسد. ما هنگام بررسی علت رنگین کمان متوجه می‌شویم که شکست نور در قطره آب مهمترین عامل ایجاد رنگین کمان است. مقدار شکست نور به طور کلی به دو عامل طول موج و محیطی که نور وارد آن می‌شود بستگی دارد.

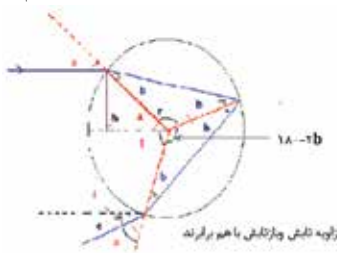
هنگامی که نور از محیطی وارد محیط دیگری می‌شود که نور در آن دارای سرعت متفاوتی باشد، زاویه شعاع نور در خط فاصل این دو محیط تغییر



اثبات رنگین کمان از طریق فرمول‌های ریاضی

(www.phys.uwosh.edu)

به منظور محاسبه زاویه رنگین کمان ما فقط نمی‌توانیم از قانون اسنل و شکست استفاده کنیم. بلکه باید از قانون سینوس و هندسه و مشتق نیز استفاده کنیم. در این قسمت ما فقط محاسبات مربوط به رنگین کمان اصلی را انجام می‌دهیم. در محاسبه زاویه رنگین کمان ما باید بعضی از خطوط اضافی را در دایره فرضی که به عنوان قطره باران است نظیر ارتفاع، شعاع دایره، زاویه تابش، زاویه شکست و زاویه بازتابش داشته باشیم.



نگاره ۷- زوایا و خطوط فرضی در قطره آب

a زاویه برخورد نور

b زاویه شکست نور

r شعاع قطره آب

زاویه بین خط چین و شعاع r که a است

e زاویه دید برای دیدن رنگ‌های رنگین کمان توسط ناظر (هدف، بدست آوردن این زاویه است)

h ارتفاع نقطه‌ای که اشعه نور به قطره برخورد می‌کند.

نکته: بین زاویه تابش و دو شعاع دایره، مثلث متساوی‌الساقین است و زاویه‌های b برابرند. همچنین بعد از برخورد شعاع نور و برگشت آن دوباره مثلث متساوی‌الساقین داریم که زاویه‌های b با هم برابرند.

مجموع زوایای مرکز دایره 360° درجه است. پس داریم:

$$f + a + (180 - 2b) + (180 - 2b) = 360$$

$$f + a + 360 - 4b = 360 \rightarrow f = 4b - a$$

از طرفی داریم:

$$f = e + a \rightarrow e = f - a \rightarrow e = 4b - a - a$$

$$e = 4b - 2a$$

از فرمول بدست آمده نسبت به a مشتق می‌گیریم و مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{de}{da} = 4 \frac{db}{da} - 2 \frac{da}{da} \rightarrow \frac{de}{da} = -2 + 4 \frac{db}{da}$$

$$\xrightarrow{\frac{de}{da}=0} -2 + 4 \frac{db}{da} = 0 \rightarrow 4 \frac{db}{da} = 2 \rightarrow \frac{db}{da} = \frac{1}{2}$$

• قانون شکست اسنل در نقطه a (محل برخورد شعاع نوری به قطره)

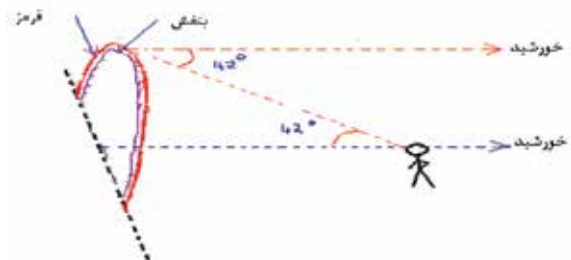
$$n_1 \sin a = n_2 \sin b$$

زمانی که رنگین کمان و دسته رنگ‌های آن را مشاهده می‌کنیم به نوری نگاه کرده‌ایم که از قطرات مختلف آب پراکنده و بازتابیده شده است. هر قطره آب می‌تواند یک رنگ از رنگین کمان را در محدوده دید ما ایجاد کند، مثلاً اگر نور قرمز خارج شده از یک قطره توسط ناظر مشاهده شود، نور آبی از آن قطره دیده نمی‌شود. بنابراین طبق نگاره ۵ می‌توان گفت ناظر نور قرمز را از قطره بالایی، زرد را از قطره میانی و آبی یا بنفش را از قطره پائینی می‌بیند. به همین دلیل بالای رنگین کمان قرمز و پائین بنفش دیده می‌شود.

(R. A. R. Tricker, 1970 & H. Nussenzveig 1977)

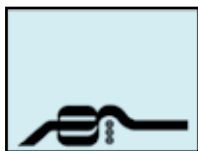
با علم به اینکه ضریب شکست نور در آب $1/33$ یا $1/34$ است، طیف بازتابیده در محدوده زوایای 40° تا 42° درجه می‌باشد (این مطلب با فرمول‌های ریاضی اثبات می‌شود). این زاویه به بزرگی و کوچکی قطره آب ربطی ندارد. اما خالص بودن رنگ‌های رنگین کمان به اندازه قطرات باران بستگی دارد. قطرات درشت (در حدود قطرهای چند میلیمتری) رنگین کمان‌های روشن با رنگ‌های تفکیک شده و زیبا می‌دهند. قطرات ریز باران (در حدود قطرهای $0/1$ میلیمتر) رنگین کمان‌هایی با رنگ‌های درهم پوشانیده شده ایجاد می‌نماید و اغلب نزدیک به رنگ سفید و شفاف دیده می‌شوند. (Jeal Walker, 1980)

رنگین کمان‌ها دایره‌های متحدالمرکزی هستند که چون زمین حرکت می‌کند ما نمی‌توانیم کل رنگین کمان را مشاهده کنیم و فقط کماتی از آن را مشاهده می‌نمائیم. هر چه خورشید در پائین‌ترین قسمت افق قرار داشته باشد رنگین کمان ما کامل‌تر می‌شود. برای وقوع این پدیده، خورشید، چشم ناظر و وسط قوس رنگین کمان باید هر سه در یک امتداد مستقیم قرار گرفته باشند. پس اگر خورشید در آسمان خیلی بالا باشد، هرگز چنین خط مستقیمی درست نمی‌شود، به همین علت رنگین کمان را تنها در صبح زود و یا موقع عصر می‌توان دید. در این وضعیت نور رنگی که به چشم ما می‌رسد، مجموعه نورهای خارج شده از تمام قطراتی است که خط واصل چشم ما و آنها با راستای نور خورشید، زاویه بین 40° و 42° درجه می‌سازد. بنابراین برای این که فردی بتواند رنگین کمان را ببیند، باید پشت به خورشید و رو به باران بایستد تا پرتوهای تجزیه شده و بازگشتی رنگین کمان را مشاهده کند. (H. Nussenzveig 1977)



نگاره ۶- حدود زوایا و جهت قرار گرفتن ناظر برای دیدن رنگین کمان

در این حالت فرد، پرتوهایی در شش رنگ قرمز، نارنجی، زرد، سبز، آبی و بنفش را می‌بیند که با تقارن کروی به چشم او می‌رسند. چشم با امتداد دادن این پرتوها، کمان‌هایی شش رنگ را در آسمان تداعی می‌کند که همان رنگین کمان است.



اگر ضریب شکست نور در آب را $1/33$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$e = 4\text{Arcsin}\frac{0.8623}{1.33} - 2\text{Arcsin}0.8623$$

$$e \approx 42.3^\circ$$

برای نور قرمز

اگر ضریب شکست نور در آب را $1/34$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$e = 4\text{Arcsin}\frac{0.7348}{1.34} - 2\text{Arcsin}0.7348$$

$$e \approx 40.6^\circ$$

برای نور بنفش

به عبارت دیگر از این محاسبات می‌توان به این نتیجه دست یافت، شدت نورخروجی در تمام زوایا یکسان نیست و بیشتر نور رنگینی که از قطره بیرون می‌رود، با جهت تابش خورشید، زاویه حدود 42° درجه می‌سازد. البته این زاویه، بستگی به رنگ پرتو دارد و بین 40° تا 42° درجه برای رنگ‌های قرمز تا بنفش متفاوت است. بنابراین می‌توان تصور کرد که تنها در زوایای حدود 42° درجه، پرتوهای رنگی به طور مؤثر از قطره خارج می‌شوند.

منابع و مآخذ

- سگل، ماکول (۱۳۷۶). آشنایی با نور و لیزر، ترجمه پرپیچهر همایون‌روز، تهران، ذکر، کتابهای قاصدک،
- C. Boyer (1987). The rainbow: from myth to mathematics, Princeton University Press. Atmospheric Sciences, 29, 211.
- Fraser, Alistair B., (1972). "Inhomogenities in the Color and Intensity of the Rainbow", Journal of
- Greenler, Robert, Rainbows, Halos, and Glories, Cambridge University Press 1980 ISBN 0 521 2305 3 and 38865 1 (pbk)
- H. Nussenzweig (1977).The theory of the rainbow, Scientific American, April.
- Humphreys, W. J(1929). Physics of the Air, McGraw-Hill Book Co.
- Humphreys, W. J.(1923). Weather Proverbs and Paradoxes, Williams and Wilkins Company
- R. A. R. Tricker (1970) Introduction to meteorological optics, American Elsevier.
- fa.wikipedia.org/wiki/
- www.youtube.com
- www.tebyan.net
- www.phys.uwosh.edu/rioux/genphysii/pdf/rainbows.pdf
- www.phys.uwosh.edu
- www.konjkav.com
- www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-rainbows

پی‌نوشت

- 1) Isaac Newton
- 2) René Descartes
- ۳) ترا هرتز برابر 10^{12} هرتز (هرتز یکای سنجش طول موج در سیستم SI است)
- 4) Snell

چون محیط اول هواست، ضریب شکست نور در هوا را یک می‌گیریم.

$$n_1 = 1$$

$$\sin a = n \sin b$$

از قانون شکست اسنل نسبت به a مشتق می‌گیریم:

$$\cos a = n \cos b \frac{db}{da} \frac{da}{da} = \frac{1}{2} \cos a = n \cos b \frac{1}{2} \rightarrow \cos a = \frac{n \cos b}{2}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

در فرمول بدست آمده بالا جایگزین می‌کنیم:

$$\sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{n}{2} \sqrt{1 - \sin^2 b}$$

$$1 - \sin^2 a = \frac{n^2}{4} (1 - \sin^2 b) *$$

● قانون شکست اسنل در نقطه b (محل خروج شعاع نورااز قطره):

$$n_1 \sin b = n_2 \sin a$$

این بار محیط اول آب و محیط دوم هواست. پس

$$n_2 = 1$$

$$n \sin b = \sin a \rightarrow \sin b = \frac{\sin a}{n}$$

از این فرمول دو نتیجه می‌گیریم:

- از فرمول Arc می‌گیریم تا در فرمول نهایی جایگزین کنیم:

$$\sin b = \frac{\sin a}{n} \rightarrow b = \text{Arcsin} \frac{\sin a}{n}$$

- طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و بجای $\sin^2 b$ در فرمولی که با * نشان داده شده است قرار می‌دهیم:

$$\sin^2 b = \frac{\sin^2 a}{n^2}$$

جایگزین می‌کنیم:

$$1 - \sin^2 a = \frac{n^2}{4} \left(1 - \frac{\sin^2 a}{n^2}\right)$$

$$4 - 4\sin^2 a = n^2 - \sin^2 a$$

$$4 - n^2 = 4\sin^2 a - \sin^2 a$$

$$4 - n^2 = 3\sin^2 a \rightarrow \sin^2 a = \frac{4 - n^2}{3}$$

$$\sin a = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \rightarrow a = \text{Arcsin} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

$$e = 4b - 2a \rightarrow e = 4\text{Arcsin} \frac{\sin a}{n} - 2\text{Arcsin} a$$

اگر بجای $\sin a$ مقادیر بدست آمده را قرار دهیم فرمول نهایی بصورت

زیر بدست می‌آید:

$$e = 4\text{Arcsin} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} - 2\text{Arcsin} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$