

# بررسی حرکت قطبی با استفاده از

## توابع ریاضی پیوسته

مهندس رضا عرب صاحبی  
کارشناس ارشد مهندسی نقشه‌برداری (ژئودزی)

### چکیده

ژئودزی عبارتست از علمی که با تعیین شکل و هندسه زمین و تعیین مختصات نقاط روی سطح زمین و بالای آن نظیر ماهواره‌ها و دیگر متحرکهای بالای سطح زمین مرتبط است.

بنابراین جهت برآوردن اهداف ژئودزی در بحث تعیین موقعیت نیاز است قبلاً به تعریف سیستم مختصات مرتبط با ژئودزی بپردازیم. برای آنکه بتوانیم به یک نقطه در فضای سه بعدی عینیت ببخشیم و ارتباط آن را با یک سیستم مرجع تحت عنوان سیستم مختصات بیان کنیم نیاز به مشخص کردن سه پارامتر ۱ - محل مبدأ ۲ - جهت توجیه محورها ۳ - پارامترهای تعریف کننده موقعیت یک نقطه در سیستم مختصات تعریف شده داریم. یکی از سیستم‌های مورد استفاده در ژئودزی سیستم مختصات زمینی ژئوستریک است که مبدأ این سیستم نقطه‌ای نزدیک مرکز زمین و محور Z سیستم در امتداد محور دوران زمین است.

از آنجاکه دوران زمین حول قطب صورت می‌گیرد و محل قطب متغیر است محور Z جایگاه متفاوتی خواهد داشت. بنابراین در پیدا کردن پارامترهای تعریف کننده موقعیت یک در این سیستم (فاکتور سوم تعریف سیستم مختصات) با مشکل مواجه می‌شویم.

در این مقاله با استفاده از مشاهدات مربوط به مؤلفه X, Y قطب از سالهای ۱۹۶۲ تا ۱۹۹۷ می‌توان نتیجه گرفت که این حرکت غیر پریودیک را می‌توان با استفاده از روشهای ریاضی با برازش توابع پیوسته مورد مطالعه

قرار داد و حتی پیش‌بینی (prediction) نمود.

نتایج نشان می‌دهد قدرت نشان دادن این حرکت مهم در توابع ریاضی گوناگون، متفاوت است بطوری که در بعضی توابع ریاضی حرکت قطبی دارای یک شتاب افزایشی می‌باشد. درحالی که بعضی دیگر نشان می‌دهند این حرکت دارای یک شتاب کاملاً نامنظم است.

در نگاره (۱) ملاحظه می‌گردد که متوسط جایگاه قطب از سال ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۵ بعنوان نقطه قراردادی قطب در تعریف سیستم مختصات مورد استفاده قرار گرفته است.

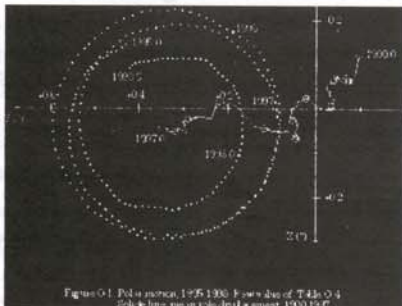
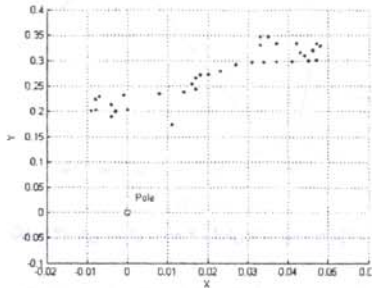


Figure 0-1 Polar motion, 1905-1997. From Liu et al., 2004.  $50 \mu\text{m}$  is the radius of the circle shown, 1905-1997.

نگاره (۱): حرکت قطب در سالهای مختلف

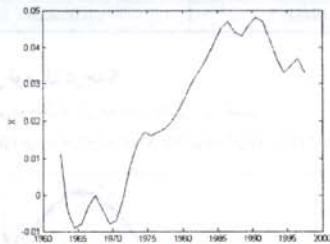


کنیم و موقعیت قطب را در هر سال بر صفحه استوا تصویر کنیم (نگاره ۲) بدست می آید. آنچه مسلم است جایگاه اصلی محور دوران زمین (قطب واقعی) در صفحه استوا دارای مختصات (۰° و ۰°) می باشد که در نگاره در کنار آن (pole) (قطب) نوشته شده است.



نگاره (۲): تغییرات موقعیت قطب

در حرکاتی نظیر حرکت قطبی می توان بمنظور مطالعه حرکت تغییرات سرعت و شتاب آنرا با توجه بازه زمانی تغییرات موقعیت، مورد ارزیابی قرار داد. مطابق آنچه در فیزیک مطرح است در حرکت یکنواخت، سرعت ثابت است و آن زمانی است که متحرک در بازه زمانهای مساوی، مسافتهای مساوی را طی می کند. اما آنچه از نگاره (۲) برمی آید این است که این حرکت از نوع یکنواخت نیست بلکه برعکس کاملاً نامنظم است. در اینجا بمنظور شناخت این حرکت تنها تغییرات موقعیت در جهت X مورد ارزیابی و محاسبه قرار گرفته است.



نگاره (۳): تغییرات مؤلفه X قطب نسبت به زمان

بنابراین جهت مطالعه سرعت می توان از رابطه ساده زیر استفاده نمود:

$$V = \frac{dX}{dt}$$

و شتاب حرکت در این جهت نیز از رابطه زیر بدست می آید:

$$a = \frac{d^2X}{dt^2}$$

در شکلها و جدولهای زیر به ترتیب توابع ریاضی برازش داده شده به مؤلفه X و مشخصات آماری مربوط به هر یک توابع یاد شده آمده است.

در جدول (۱) مختصات قطب متوسط در (ITRF) نشان داده شده است.

جدول (۱): مختصات قطب متوسط براساس نتایج (EOP(IERS)97C01)

| year   | x (میلی ثانیه) | y (میلی ثانیه) |
|--------|----------------|----------------|
| ۱۹۶۲/۵ | -۰/۰۱۱         | -۰/۱۷۴         |
| ۱۹۶۳/۵ | -۰/۰۰۴         | -۰/۱۹۰         |
| ۱۹۶۴/۵ | -۰/۰۰۹         | -۰/۲۰۲         |
| ۱۹۶۵/۵ | -۰/۰۰۸         | -۰/۲۰۴         |
| ۱۹۶۶/۵ | -۰/۰۰۳         | -۰/۲۰۱         |
| ۱۹۶۷/۵ | ۰/۰۰۰          | -۰/۲۰۳         |
| ۱۹۶۸/۵ | -۰/۰۰۴         | -۰/۲۱۳         |
| ۱۹۶۹/۵ | -۰/۰۰۸         | -۰/۲۲۴         |
| ۱۹۷۰/۵ | -۰/۰۰۷         | -۰/۲۲۹         |
| ۱۹۷۱/۵ | -۰/۰۰۱         | -۰/۲۳۲         |
| ۱۹۷۲/۵ | -۰/۰۰۸         | -۰/۲۳۵         |
| ۱۹۷۳/۵ | -۰/۰۱۴         | -۰/۲۳۸         |
| ۱۹۷۴/۵ | -۰/۰۱۷         | -۰/۲۴۴         |
| ۱۹۷۵/۵ | ۰/۰۱۶          | -۰/۲۵۵         |
| ۱۹۷۶/۵ | ۰/۰۱۷          | -۰/۲۶۶         |
| ۱۹۷۷/۵ | ۰/۰۱۸          | -۰/۲۷۲         |
| ۱۹۷۸/۵ | ۰/۰۲۰          | -۰/۲۷۳         |
| ۱۹۷۹/۵ | ۰/۰۲۳          | -۰/۲۸۰         |
| ۱۹۸۰/۵ | ۰/۰۲۷          | -۰/۲۹۲         |
| ۱۹۸۱/۵ | ۰/۰۳۱          | -۰/۲۹۷         |
| ۱۹۸۲/۵ | ۰/۰۳۴          | -۰/۲۹۷         |
| ۱۹۸۳/۵ | ۰/۰۳۷          | -۰/۲۹۹         |
| ۱۹۸۴/۵ | -۰/۰۴۱         | -۰/۲۹۹         |
| ۱۹۸۵/۵ | -۰/۰۴۵         | -۰/۳۰۰         |
| ۱۹۸۶/۵ | -۰/۰۴۷         | -۰/۳۰۲         |
| ۱۹۸۷/۵ | -۰/۰۴۴         | -۰/۳۱۰         |
| ۱۹۸۸/۵ | -۰/۰۴۳         | -۰/۳۱۶         |
| ۱۹۸۹/۵ | -۰/۰۴۶         | -۰/۳۲۰         |
| ۱۹۹۰/۵ | -۰/۰۴۸         | -۰/۳۲۹         |
| ۱۹۹۱/۵ | -۰/۰۴۷         | -۰/۳۳۴         |
| ۱۹۹۲/۵ | -۰/۰۴۲         | -۰/۳۳۳         |
| ۱۹۹۳/۵ | -۰/۰۳۷         | -۰/۳۳۴         |
| ۱۹۹۴/۵ | -۰/۰۳۳         | -۰/۳۴۷         |
| ۱۹۹۵/۵ | -۰/۰۳۵         | -۰/۳۴۶         |
| ۱۹۹۶/۵ | -۰/۰۳۷         | -۰/۳۴۴         |
| ۱۹۹۷/۵ | -۰/۰۳۳         | -۰/۳۳۱         |

با استفاده از اطلاعات جدول (۱) در صورتی که از بالا به کره زمین نگاه

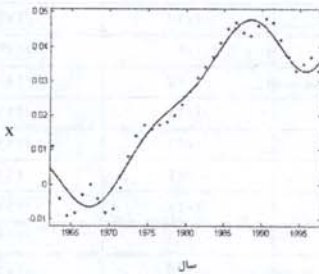
جدول (۳): ضرایب برآورد شده و پارامترهای آماری پلی نومیال درجه ۹

|                   |             |
|-------------------|-------------|
| $P_1$             | -2.542e-019 |
| $P_2$             | 4.765e-015  |
| $P_3$             | -3.301e-011 |
| $P_4$             | 1.027e-007  |
| $P_5$             | -8.069e-005 |
| $P_6$             | -0.4206     |
| $P_7$             | 1483        |
| $P_8$             | -2.166e+006 |
| $P_9$             | 1.574e+009  |
| $P_{10}$          | -4.662e+011 |
| SSE               | -4.662e+011 |
| R-square          | 0.9652      |
| Adjusted R-square | 0.9531      |
| RMSE              | 0.004192    |

### ج - مجموعه سه تابع سینوسی

این تابع دارای معادله ریاضی زیر است:

$$f(x) = a_1 \sin(b_1 x + c_1) + a_2 \sin(b_2 x + c_2) + a_3 \sin(b_3 x + c_3)$$



نگاره (۶): مجموع سه تابع سینوسی برازش داده شده به مؤلفه X

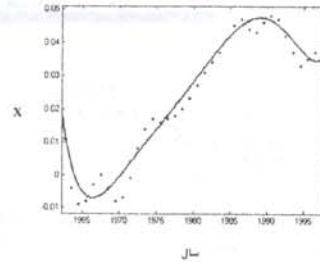
جدول (۴): ضرایب برآورد شده و پارامترهای آماری مجموع سه تابع سینوسی

|                   |           |
|-------------------|-----------|
| $a_1$             | -0.007888 |
| $b_1$             | 0.3961    |
| $c_1$             | 8.148     |
| $a_2$             | 0.7578    |
| $b_2$             | 0.02382   |
| $c_2$             | 135.4     |
| $a_3$             | -0.01174  |
| $b_3$             | 0.2799    |
| $c_3$             | 27.6      |
| SSE               | 0.0004201 |
| R-square          | 0.968     |
| Adjusted R-square | 0.9585    |
| RMSE              | 0.003944  |

### الف - پلی نومیال درجه ۶:

این پلی نومیال دارای معادله ریاضی زیر است:

$$f(x) = p_1 x^6 + p_2 x^5 + p_3 x^4 + p_4 x^3 + p_5 x^2 + p_6 x + p_7$$



نگاره (۴): پلی نومیال درجه ۶ برازش داده شده به مؤلفه X

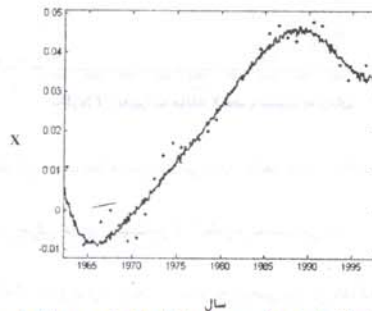
جدول (۲): ضرایب برآورد شده و پارامترهای آماری پلی نومیال درجه ۶

|                   |             |
|-------------------|-------------|
| $P_1$             | 2.765e-009  |
| $P_2$             | -3.285e-005 |
| $P_3$             | 0.1627      |
| $P_4$             | -429.5      |
| $P_5$             | 6.38e+005   |
| $P_6$             | -5.055e+008 |
| $P_7$             | 1.668e+011  |
| SSE               | 0.0004363   |
| R-square          | 0.9668      |
| Adjusted R-square | 0.9599      |
| RMSE              | 0.003879    |

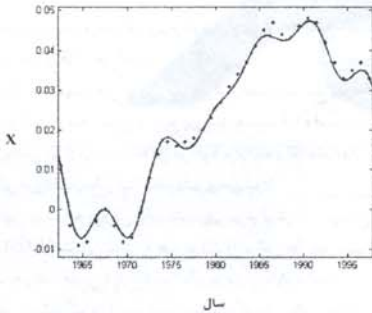
### ب - پلی نومیال درجه ۹

این پلی نومیال دارای معادله ریاضی زیر است:

$$f(x) = p_1 x^9 + p_2 x^8 + p_3 x^7 + p_4 x^6 + p_5 x^5 + p_6 x^4 + p_7 x^3 + p_8 x^2 + p_9 x + p_{10}$$



نگاره (۵): پلی نومیال درجه ۹ برازش داده شده به مؤلفه X



نگاره (۸): مجموع شش تابع سینوسی برازش داده شده به مؤلفه X

جدول (۶): ضرایب برآورد شده و پارامترهای آماری مجموع شش تابع سینوسی

|                   |            |
|-------------------|------------|
| $a_1$             | -0.00486   |
| $b_1$             | 0.9074     |
| $c_1$             | -15.96     |
| $a_2$             | 0.002715   |
| $b_2$             | 0.5583     |
| $c_2$             | 307.2      |
| $a_3$             | -0.005508  |
| $b_3$             | 1.004      |
| $c_3$             | -8.909     |
| $a_4$             | -0.004308  |
| $b_4$             | 0.3886     |
| $c_4$             | -27.58     |
| $a_5$             | -0.01361   |
| $b_5$             | 0.2053     |
| $c_5$             | -19.73     |
| $a_6$             | -0.03898   |
| $b_6$             | 0.03334    |
| $c_6$             | 82.31      |
| SSE               | 6.998e-005 |
| R-square          | 0.9947     |
| Adjusted R-square | 0.9896     |
| RMSE              | 0.001972   |

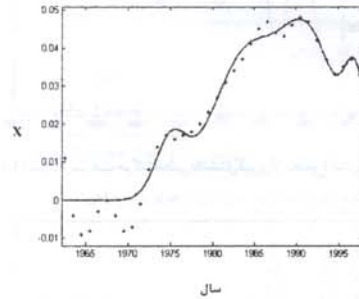
نکته‌ای که در اینجا باید به آن توجه داشت این است که توابع ریاضی نوشته شده خارج از مؤلفه‌های مورد استفاده است. بدین معنی که منظور از  $f(x)$  در روابط بالا همان مؤلفه X و منظور از x در سمت راست روابط بالا، زمان یا عبارتی سال اندازه‌گیری مؤلفه X می‌باشد. اما آنچه که از جدول (۱) پیداست تابع حرکت یک تابع پیوسته نیست

دوره چهاردهم، شماره پنجاه و پنجم / ۶۳

#### د - مجموع چهار تابع گوسی

این تابع دارای معادله زیر است:

$$f(x) = a_1 e^{-\left(\frac{x-b_1}{c_1}\right)^2} + a_2 e^{-\left(\frac{x-b_2}{c_2}\right)^2} + a_3 e^{-\left(\frac{x-b_3}{c_3}\right)^2} + a_4 e^{-\left(\frac{x-b_4}{c_4}\right)^2}$$



نگاره (۷): مجموع چهار تابع گوسی برازش داده شده به مؤلفه X

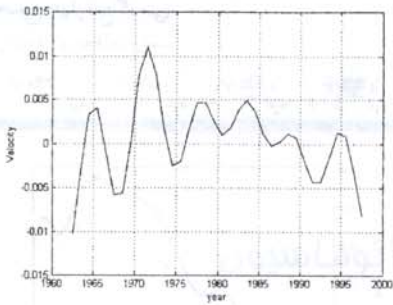
جدول (۵): ضرایب برآورد شده و پارامترهای آماری مجموع چهار تابع گوسی

|                   |           |
|-------------------|-----------|
| $a_1$             | 0.03833   |
| $b_1$             | 1992      |
| $c_1$             | 4.643     |
| $a_2$             | 0.03824   |
| $b_2$             | 1984      |
| $c_2$             | 5.889     |
| $a_3$             | 0.02581   |
| $b_3$             | 1997      |
| $c_3$             | 1.97      |
| $a_4$             | 0.01444   |
| $b_4$             | 1975      |
| $c_4$             | 2.549     |
| SSE               | 0.0005161 |
| R-square          | 0.9607    |
| Adjusted R-square | 0.9427    |
| RMSE              | 0.004637  |

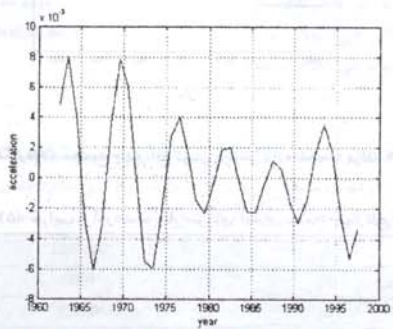
#### ه - مجموع شش تابع سینوسی

این تابع دارای معادله ریاضی زیر است:

$$f(x) = a_1 \sin(b_1 x + c_1) + a_2 \sin(b_2 x + c_2) + a_3 \sin(b_3 x + c_3) + a_4 \sin(b_4 x + c_4) + a_5 \sin(b_5 x + c_5) + a_6 \sin(b_6 x + c_6)$$



نگاره (۱۱): نمودار سرعت حرکت قطبی بامشتق گیری از مجموع شش تابع سینوسی



نگاره (۱۲): نمودار شتاب حرکت قطبی بامشتق گیری از مجموع شش تابع سینوسی

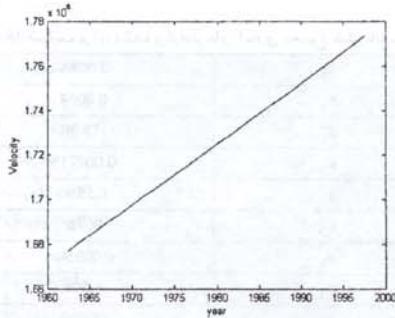
### نتیجه گیری

- ۱- با استفاده از توابع ریاضی مشخص پیوسته مورد استفاده در این مقاله، می توان با بکارگیری توابع مذکور در مورد مؤلفه  $\theta$  جابجایی بردار قطب را مورد بررسی قرار داد.
- ۲- با محاسبه ضرایب بدست آمده پس از برازش، مکان قطب را می توان در سالهای آینده پیش بینی نمود.
- ۳- در بین توابع ریاضی مورد استفاده، تابع مجموع شش تابع سینوسی در نمایش تغییرات سرعت و شتاب حرکت قطبی دارای قدرت آشکارسازی بالاتری نسبت به بقیه است.

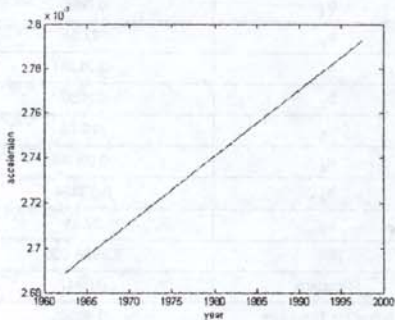
بلکه گسته است و مشتق اول و دوم در مورد یک تابع گسته تنها از روشهای عددی قابل حل است.

یکی از روشهای حل چنین مسائلی برازاندن یک تابع پیوسته به مقادیر گسته و گرفتن ديفرانسیل از تابع پیوسته بدست آمده است. در این مقاله توابع ریاضی متفاوتی به داده های موجود برازانده و با استفاده از پارامترهای آماری در مورد تابع مطلوب تصمیم گیری می شود.

از این چند تابع برازش داده شده، پلی نومیال درجه ۶ و تابع گوسی که دارای RMSE کمتری نسبت به بقیه بودند را اساس مطالعه تغییرات سرعت و شتاب حرکت قطبی قرار دادیم. حال با در اختیار داشتن ضرایب تابع مورد نظر و مشتق گیری اول و دوم نسبت به کمیت زمان، تغییرات سرعت و شتاب را بدست می آوریم.



نگاره (۹): نمودار سرعت حرکت قطبی بامشتق گیری از پلی نومیال درجه ۶



نگاره (۱۰): نمودار شتاب حرکت قطبی بامشتق گیری از پلی نومیال درجه ۶

با توجه به نگاره های ۹ و ۱۰ ملاحظه می گردد، چون پلی نومیال درجه ۶ قدرت نمایش سرعت و شتاب حرکت قطبی را ندارد، لذا این تغییرات را بصورت خطی نمایش می دهد. اما همان داده ها توسط تابعی که مجموع شش تابع سینوسی می باشد بعلا افزایش قدرت نمایش بصورت نگاره های ۱۱ و ۱۲ ظاهر می شوند.