بررسی حرکت قطبی با استفاده از توابع ریاضی پیوسته

مهندس رضا عرب صاحبی
کارشناس ارشد مهندسی نقشه‌برداری (ژئودزی)

چکیده

ژئودزی عبارتست از علمی که با تعیین شکل و هندسه زمین و تعیین مختصات نقاط روی سطح زمین و بالای آن نظیر ماهواره‌ها و دیگر متحرکهای بالای سطح زمین مرتبط است.

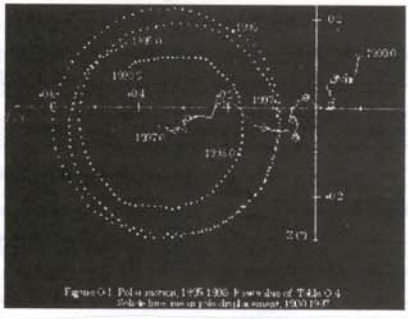
بنابراین جهت برآوردن اهداف ژئودزی در بحث تعیین موقعیت نیاز است قبلاً به تعریف سیستم مختصات مرتبط با ژئودزی بپردازیم. برای آنکه بتوانیم به یک نقطه در فضای سه بعدی عینیت ببخشیم و ارتباط آن را با یک سیستم مرجع تحت عنوان سیستم مختصات بیان کنیم نیاز به مشخص کردن سه پارامتر ۱ - محل مبدأ ۲ - جهت توجیه محورها۳ - پارامترهای تعریف کننده موقعیت یک نقطه در سیستم مختصات تعریف شده داریم. یکی از سیستم‌های مورد استفاده در ژئودزی سیستم مختصات زمینی ژئوسنتریک است که مبدأ این سیستم نقطه‌ای نزدیک مرکز زمین و محور Z سیستم در امتداد محور دوران زمین است.

از آنجاکه دوران زمین حول قطب صورت می‌گیرد و محل قطب متغیر است محور Z جایگاه متفاوتی خواهدداشت. بنابراین در پیداکردن پارامترهای تعریف کننده موقعیت یک در این سیستم(فاکتور سوم تعریف سیستم مختصات) با مشکل مواجه می‌شویم.

در این مقاله با استفاده از مشاهدات مربوط به مؤلفه X,Y قطب از سالهای ۱۹۶۲ تا ۱۹۹۷ می‌توان نتیجه گرفت که این حرکت غیر پریودیک را می‌توان با استفاده از روشهای ریاضی با برازش توابع پیوسته مورد مطالعه قرارداد و حتی پیش‌بینی (prediction) نمود.

نتایج نشان می‌دهد قدرت نشان دادن این حرکت مهم در توابع ریاضی گوناگون، متفاوت است بطوری که در بعضی توابع ریاضی حرکت قطبی دارای یک شتاب افزایشی می‌باشد. درحالی که بعضی دیگر نشان می‌دهند این حرکت دارای یک شتاب کاملاً نامنظم است.

در نگاره (۱) ملاحظه می‌گردد که متوسط جایگاه قطب از سال ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۵ بعنوان نقطه قراردادی قطب در تعریف سیستم مختصات مورد استفاده قرار گرفته است.



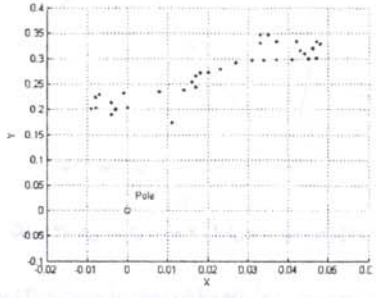
نگاره(۱): حرکت قطب درسالهای مختلف

در جدول (۱) مختصات قطب متوسط در (ITRF) نشان داده شده است.

جدول(۱): مختصات قطب متوسط براساس نتایج (EOP(IERS)97C01)

year	x (میلی ثانیه)	y (میلی ثانیه)
۱۹۶۲/۵	۰/۰۱۱	۰/۱۷۴
۱۹۶۳/۵	-۰/۰۰۴	۰/۱۹۰
۱۹۶۴/۵	-۰/۰۰۹	۰/۲۰۲
۱۹۶۵/۵	-۰/۰۰۸	۰/۲۰۴
۱۹۶۶/۵	-۰/۰۰۳	۰/۲۰۱
۱۹۶۷/۵	۰/۰۰۰	۰/۲۰۳
۱۹۶۸/۵	-۰/۰۰۴	۰/۲۱۳
۱۹۶۹/۵	-۰/۰۰۸	۰/۲۲۴
۱۹۷۰/۵	-۰/۰۰۷	۰/۲۲۹
۱۹۷۱/۵	-۰/۰۰۱	۰/۲۳۲
۱۹۷۲/۵	۰/۰۰۸	۰/۲۳۵
۱۹۷۳/۵	۰/۰۱۴	۰/۲۳۸
۱۹۷۴/۵	۰/۰۱۷	۰/۲۲۴
۱۹۷۵/۵	۰/۰۱۶	۰/۲۵۵
۱۹۷۶/۵	۰/۰۱۷	۰/۲۶۶
۱۹۷۷/۵	۰/۰۱۸	۰/۲۷۲
۱۹۷۸/۵	۰/۰۲۰	۰/۲۷۳
۱۹۷۹/۵	۰/۰۲۳	۰/۲۸۰
۱۹۸۰/۵	۰/۰۲۷	۰/۲۹۲
۱۹۸۱/۵	۰/۰۳۱	۰/۲۹۷
۱۹۸۲/۵	۰/۰۳۴	۰/۲۹۷
۱۹۸۳/۵	۰/۰۳۷	۰/۲۹۹
۱۹۸۴/۵	۰/۰۴۱	۰/۲۹۹
۱۹۸۵/۵	۰/۰۴۵	۰/۳۰۰
۱۹۸۶/۵	۰/۰۴۷	۰/۳۰۲
۱۹۸۷/۵	۰/۰۴۴	۰/۳۱۰
۱۹۸۸/۵	۰/۰۴۳	۰/۳۱۶
۱۹۸۹/۵	۰/۰۴۶	۰/۳۲۰
۱۹۹۰/۵	۰/۰۴۸	۰/۳۲۹
۱۹۹۱/۵	۰/۰۴۷	۰/۳۳۴
۱۹۹۲/۵	۰/۰۴۲	۰/۳۳۳
۱۹۹۳/۵	۰/۰۳۷	۰/۳۳۴
۱۹۹۴/۵	۰/۰۳۳	۰/۳۴۷
۱۹۹۵/۵	۰/۰۳۵	۰/۳۴۶
۱۹۹۶/۵	۰/۰۳۷	۰/۰۳۳۴
۱۹۹۷/۵	۰/۰۳۳	۰/۳۳۱

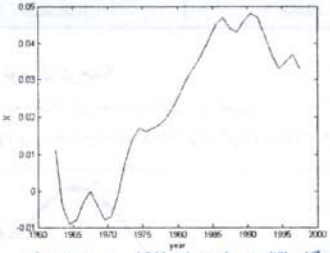
با استفاده از اطلاعات جدول(۱) در صورتی که از بالا به کره زمین نگاه کنیم و موقعیت قطب را در هر سال بر صفحه استوا تصویر کنیم نگاره(۲) بدست می‌آید. آنچه مسلم است جایگاه اصلی محور دوران زمین(قطب واقعی) در صفحه استوا دارای مختصات(°و °) می‌باشد که در نگاره در کنار آن (pole)(قطب) نوشته شده است.



نگاره(۲): تغییرات موقعیت قطب

در حرکاتی نظیر حرکت قطبی می‌توان بمنظور مطالعه حرکت تغییرات سرعت و شتاب آنرا با توجه بازه زمانی تغییرات موقعیت، مورد ارزیابی قرارداد. مطابق آنچه در فیزیک مطرح است در حرکت یکنواخت، سرعت ثابت است و آن زمانی است که متحرک در بازه زمانهای مساوی، مسافتهای مساوی را طی می‌کند. اما آنچه از نگاره(۲) برمی‌آید این است که این حرکت از نوع یکنواخت نیست بلکه برعکس کاملاً نامنظم است.

در اینجا بمنظور شناخت این حرکت تنها تغییرات موقعیت در جهت X مورد ارزیابی و محاسبه قرار گرفته است.



نگاره(۳): تغییرات مؤلفه X قطب نسبت به زمان

بنابراین جهت مطالعه سرعت می‌توان از رابطه ساده زیر استفاده نمود:

$$V=\frac{dX}{dt}$$

و شتاب حرکت در این جهت نیز از رابطه زیر بدست می‌آید:

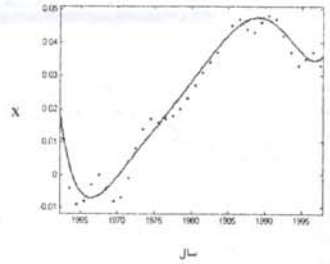
$$a=\frac{d^2X}{dt^2}$$

در شکلها و جدولهای زیر به ترتیب توابع ریاضی برازش داده شده به مؤلفه X و مشخصات آماری مربوط به هر یک توابع یاد شده آمده است.

الف- پلی نومیال درجه۶:

این پلی نومیال دارای معادله ریاضی زیر است:

$$f(x)=p_1x^6+p_2x^5+p_3x^4+p_4x^3+p_5x^2+p_6x+p_7$$



نگاره(۴): پلی نومیال درجه ۶ برازش داده شده به مؤلفه X

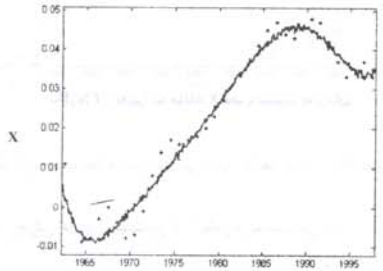
جدول(۲): ضرایب برآوردشده وپارامترهای آماری پلی نومیال درجه۶

P_1	2.765e-009
P_2	-3.285e-005
P_3	0.1627
P_4	-429.5
P_5	6.38e+005
P_6	-5.055e+008
P_7	1.668e+011
SSE	0.0004363
R-square	0.9668
Adjusted R-square	0.9599
RMSE	0.003879

ب - پلی نومیال درجه۹

این پلی نومیال دارای معادله ریاضی زیر است:

$$f(x)=p_1x^9+p_2x^8+p_3x^7+p_4x^6+p_5x^5+p_6x^4+p_7x^3+p_8x^2+p_9x+p_{10}$$



نگاره(۵): پلی نومیال درجه ۹ برازش داده شده به مؤلفه X

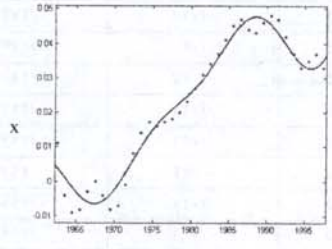
جدول(۳): ضرایب برآوردشده وپارامترهای آماری پلی نومیال درجه ۹

P_1	-2.542e-019
P_2	4.765e-015
P_3	-3.301e-011
P_4	1.027e-007
P_5	-8.069e-005
P_6	-0.4206
P_7	1483
P_8	-2.166e+006
P_9	1.574e+009
P_{10}	-4.662e+011
SSE	-4.662e+011
R-square	0.9652
Adjusted R-square	0.9531
RMSE	0.004192

ج- مجموعه سه تابع سینوسی

این تابع دارای معادله ریاضی زیراست:

$$f(x)=a_1\sin(b_1x+c_1)+a_2\sin(b_2x+c_2)+a_3\sin(b_3x+c_3)$$



نگاره(۶): مجموع سه تابع سینوسی برازش داده شده به مؤلفه X

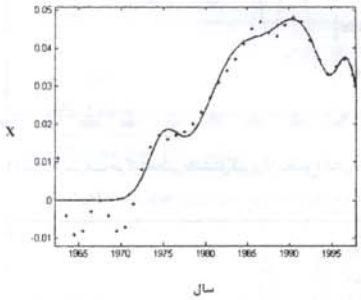
جدول(۴): ضرایب برآوردشده وپارامترهای آماری مجموع سه تابع سینوسی

a_1	-0.007888
b_1	0.3961
c_1	8.148
a_2	0.7578
b_2	0.02382
c_2	135.4
a_3	-0.01174
b_3	0.2799
c_3	27.6
SSE	0.0004201
R-square	0.968
Adjusted R-square	0.9585
RMSE	003944

د - مجموع چهار تابع گوسی

این تابع دارای معادله زیراست:

$$f(x) = a_1 e^{-\left(\frac{x-b_1}{c_1}\right)^2} + a_2 e^{-\left(\frac{x-b_2}{c_2}\right)^2} + a_3 e^{-\left(\frac{x-b_3}{c_3}\right)^2} + a_4 e^{-\left(\frac{x-b_4}{c_4}\right)^2}$$



نگاره(۷): مجموع چهارتابع گوسی برازش داده شده به مؤلفه X

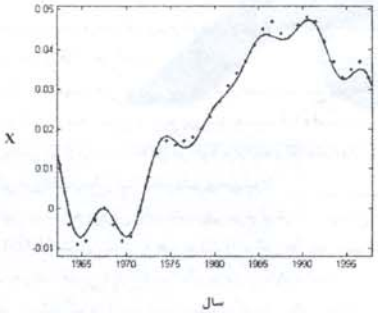
جدول(۵): ضرایب برآوردشده وپارامترهای آماری مجموع چهارتابع گوسی

a_1	0.03833
b_1	1992
c_1	4.643
a_2	0.03824
b_2	1984
c_2	5.889
a_3	0.02581
b_3	1997
c_3	1.97
a_4	0.01444
b_4	1975
c_4	2.549
SSE	0.0005161
R-square	0.9607
Adjusted R-square	0.9427
RMSE	0.004637

ه - مجموع شش تابع سینوسی

این تابع دارای معادله ریاضی زیراست:

$$f(x)=a_1\sin(b_1x+c_1)+a_2\sin(b_2x+c_2)+a_3\sin(b_3x+c_3)+a_4\sin(b_4x+c_4)$$
$$+a_5\sin(b_5x+c_5)+a_6\sin(b_6x+c_6)$$



نگاره(۸): مجموع شش تابع سینوسی برازش داده شده به مؤلفه X

جدول(۶): ضرایب برآوردشده وپارامترهای آماری مجموع شش‌تابع‌سینوسی

a_1	-0.00486
b_1	0.9074
c_1	-15.96
a_2	0.002715
b_2	0.5583
c_2	307.2
a_3	-0.005508
b_3	1.004
c_3	-8.909
a_4	-0.004308
b_4	0.3886
c_4	-27.58
a_5	-0.01361
b_5	0.2053
c_5	-19.73
a_6	-0.03898
b_6	0.03334
c_6	82.31
SSE	6.998e-005
R-square	0.9947
Adjusted R-square	0.9896
RMSE	0.001972

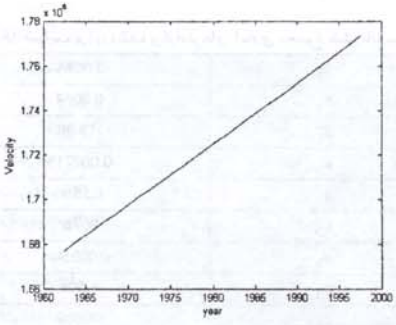
نکته‌ای که در اینجا باید به آن توجه داشت این است که توابع ریاضی نوشته شده خارج از مؤلفه‌های مورد استفاده است. بدین معنی که منظور از f(x) در روابط بالا همان مؤلفه X و منظور از x در سمت راست روابط بالا، زمان یا بعبارتی سال اندازه‌گیری مؤلفه X می‌باشد.

اما آنچه که از جدول(۱) پیداست تابع حرکت یک تابع پیوسته نیست

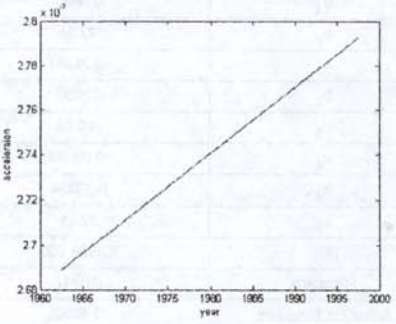
بلکه گسسته است و مشتق اول و دوم در مورد یک تابع گسسته تنها از روشهای عددی قابل حل است.

یکی از روشهای حل چنین مسائلی برازاندن یک تابع پیوسته به مقادیر گسسته و گرفتن دیفرانسیل از تابع پیوسته بدست آمده است. در این مقاله توابع ریاضی متفاوتی به داده‌های موجود برازانده و با استفاده از پارامترهای آماری در مورد تابع مطلوب تصمیم‌گیری می‌شود.

از این چند تابع برازش داده شده، پلی نومیال درجه ۶ و تابع گوسی که دارای RMSE کمتری نسبت به بقیه بودند را اساس مطالعه تغییرات سرعت و شتاب حرکت قطبی قرار دادیم. حال با در اختیار داشتن ضرایب تابع موردنظر و مشتق‌گیری اول و دوم نسبت به کمیت زمان، تغییرات سرعت و شتاب را بدست می‌آوریم.

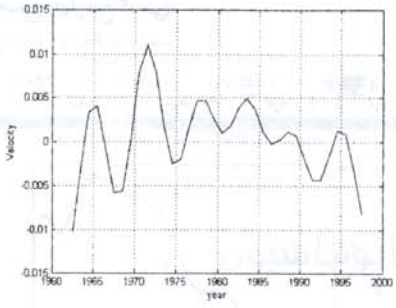


نگاره(۹): نمودارسرعت حرکت قطبی بامشتق‌گیری ازپلی نومیال درجه ۶

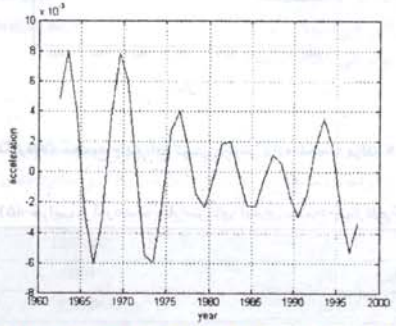


نگاره(۱۰): نمودارشتاب حرکت قطبی بامشتق‌گیری ازپلی نومیال درجه۶

با توجه به نگاره‌های ۹و ۱۰ ملاحظه می‌گردد، چون پلی نومیال درجه ۶ قدرت نمایش سرعت و شتاب حرکت قطبی را ندارد، لذا این تغییرات را بصورت خطی نمایش می‌دهد. اما همان داده‌ها توسط تابعی که مجموع شش تابع سینوسی می‌باشد بعلت افزایش قدرت نمایش بصورت نگاره‌های ۱۱و۱۲ ظاهر می‌شوند.



نگاره(۱۱):نمودارسرعت حرکت قطبی بامشتق‌گیری ازمجموع شش تابع سینوسی



نگاره(۱۲):نمودارشتاب حرکت قطبی بامشتق‌گیری ازمجموع شش تابع سینوسی

نتیجه گیری

۱ - با استفاده از توابع ریاضی مشخص پیوسته مورد استفاده در این مقاله، می‌توان با بکارگیری توابع مذکور در مورد مؤلفه x، جابجایی بردار قطب را مورد بررسی قرارداد.

۲ - با محاسبه ضرایب بدست آمده پس از برازش ،مکان قطب را می‌توان در سالهای آینده پیش بینی نمود.

۳ - در بین توابع ریاضی مورد استفاده ،تابع مجموع شش تابع سینوسی در نمایش تغییرات سرعت و شتاب حرکت قطبی دارای قدرت آشکارسازی بالاتری نسبت به بقیه است.