روشی جدید بمنظور بهینه‌سازی شبکهٔ نقشه‌برداری[1]

ترجمه: علیرضا آزموده اردلان

خلاصه:

این مقاله راجع به تعیین ماتریس وزن مشاهدات از طریق ماتریس وریانس کوواریانس مختصّات است. در این مقاله روش جدیدی ارائه شده که می‌تواند برمشکل طرّاحی **«ماتریس معیار مناسب»** فایق آید. این روش شبیه سرشکنی کمترین مربّعات مشاهدات نقشه‌برداری است، و برحسب اهداف شبکه‌های کنترل، قادر است دقّت مورد نیاز را تحت شرایط عملی بوجود آورد، یعنی تأمین دقّت طرح با حداقّل امکانات یا طرّاحی مطمئن همراه با دقّت مورد درخواست و حداقّل امکانات.

مقدّمه:

امروزه نیازهای مهندسی نقشه‌برداری با پیشرفت علم و تکنولوژی، نقشه‌برداران را به میدان کشیده است. مثالهای زیر دلیلی بر این مدعاست:

الف) نقشه‌برداری تونل؛ تونلهایی به طول بیش از ۱۰ کیلومتر در چین وجود دارد.[۲] در چنین تونلهایی حفّاری از دو طرف و در نهایت بهم رسیدن دو حفّاری با دقّتی بهتر از ۵ سانتیمتر در ارتفاع و سمت کار مشکل است.

ب) نقشه‌برداری تغییر شکل سدّ؛ شبکهٔ نقشه‌برداری سدّ معروف Guozhou (بزرگترین سدّ با طولی بیش از ۲ کیلومتر در Hubei چین[۳] نیازمند دقّت بیشتری از ۱ سانتیمتر است.

ج) ساختمان «شتاب دهندهٔ ذرات»؛ در این مورد دقّت بیش از ۱میلیمتر مورد نیاز است. از مثالهای بالا، می‌توان برخی از ویژگیهای مهندسی نقشه‌برداری پیشرفته را نتیجه گرفت:

۱- استفادهٔ ویژه از شبکه؛ در مثال الف، تعداد نقاط خیلی معدود مورد استفاده است و اکثر نقاط مورد استفاده قرار نمی‌گیرند.

۲- دقّت خیلی بالای نقاط شبکه؛ از مثال ج، روشن می‌شود که نقشه‌برداری کلاسیک نمی‌تواند جوابگوی این نیاز باشد.

۳- قابلیّت اطمینان؛ برای مقاصدی چون نقشه‌برداری، تغییر شکل شبکه می‌بایست قابل اطمینان باشد.

ویژگیهای مهندسی نقشه‌برداری پیشرفته روشهای نقشه‌برداری کلاسیک را زیر سؤال می‌برد. خوشبختانه دستگاههای جدید نقشه‌برداری دارای دقّت خیلی بیشتری از دستگاههای قبلی هستند. به عنوان مثال EDM-3000 دارای دقّت $0.2cm+1pp_M$ است. با این وجود اگر بخواهیم تنها متکی به پیشرفت دستگاههای نقشه‌برداری باشیم، باز هم نمی‌توانیم جوابگوی نیازهای مهندسی پیشرفته باشیم، گذشته از آنکه این اتکا نیازمند هزینهٔ گزاف، نیروی انسانی و وقتی بسیار است.

بنابراین، بهینه‌سازی شبکه‌های نقشه‌برداری بیش از پیش حائز اهمیت می‌گردد. بکمک کامپیوتر، می‌توان به **«بهترین»** طرحی از شبکه‌های نقشه‌برداری رسیده که با هزینهٔ خیلی پائین نیازمندیهای مهندسی پیشرفته را برآورده سازد.

در اینجا لازم است معنی بهترین را روشن سازیم، به شکل ۱ نگاه کنید، این شکل از سه مستطیل تشکیل شده. در نقشه‌برداری عملی، نیازهای زیر را داریم:

نگارهٔ ۱

۱) بیشترین دقّت با حداقّل امکانات؛
۲) تأمین دقّت با حداقّل امکانات؛
۳) تأمین دقّت و اطمینان با حداقّل امکانات.

نیازهای فوق می‌بایست تحت مقتضیات نقشه‌برداری عملی باشد، مانند دستگاههای نقشه‌برداری به کار برده شده، زمان، شرایط جوی و غیره. براساس اهداف شبکهٔ نقشه‌برداری، اگر طرحی یکی از سه نیاز فوق را برآورده سازد، آن طرح را می‌توان مناسب خواند.

در اوایل دههٔ ۱۹۷۰ , Grafarand استفاده از معادلهٔ زیر را جهت رسیدن به بهترین طرّاحی پیشنهاد کرد:

$$(A^TPA)^{-1}=Q_x \quad (1)$$

در اینجا:

A ماتریس ضرائب؛

P ماتریس وزن مجهول مشاهدات؛

و Q_x ماتریس و ریانس - کوواریانس مختصات است.

از پیش، ماتریس و ریانس - کوواریانس Q_x معلوم است، و A ماتریسی ثابت که در ارتباط با ترکیب شبکه است. با استفاده از معادلهٔ (۱) می‌توان ماتریس وزن مشاهدات به دست آورد اگر چه ماتریس وزن مشاهدات P را می‌توان از معادلهٔ (۱) به دست آورد، اما ماتریس وزن به دست آمده اکثراً دارای عناصر منفی است. در نقشه‌برداری عملی، داشتن مشاهده‌ای با وزن منفی غیرممکن است. بنابراین باید شرایط زیر را در نظرگرفت:

۱- P ماتریس قطری است؛

۲- عناصر روی قطر $p_{ii}(i=1,2,...,n)$ باید بین b_i و a_i باشند یعنی:

$$a_i \le p_i \le b_i \tag{۲}$$

$(b_i>a_i>o)$

چون مجاز به داشتن مشاهدات وابسته نیستیم، شرط ۱ الزامی است. واضح است p_{ii} باید بزرگتر از صفر باشد ($p_{ii}>a_i$). طبق شرایط عملی، p_{ii} باید کمتر از مقداری مانند b_i باشد این مقدار بستگی به شرایط عملی دارد. بدون این شرط ممکن است p_{ii} بزرگ غیرعملی به دست آوریم.

تحت شروط ۱ و ۲ رسیدن به p_{ii} از طریق معادلهٔ (۱) خیلی مشکل و حتی غیرممکن است. بسیاری از صاحبنظران در اینگونه موارد علت را **«مناسب»** نبودن Q_x در نظر می‌گیرند. از این رو، روشهای متعددی در ارائه **«Q_x مناسب»** بوجود آمده است. با این وجود، تاکنون، یک **«ماتریس معیار مناسبی»** که بتواند معادلهٔ (۱) را بسادگی حل کرده و در نقشه‌برداری به کار رود کشف نشده است. این مقاله روش کلاً جدیدی[۴] را ارائه داده، که درگیر مشکل داشتن **«ماتریش معیار مناسب** Q_x» نشده و همچنین مسئله را حل می‌کند.

اثبات:

فرض کنید مدل سرشکنی بصورت زیر در اختیار است:

$$v=Ax - L \tag{۳}$$

در اینجا:

v بردار باقیمانده؛

A ماتریس ضرائب؛

X بردار مختصّات؛

L بردار مشاهدات است.

براساس سرشکنی کمترین مربّعات، بردار مختصّات مجهول برابر:

$$X=(A^TPA)^{-1}A^TPL \tag{۴}$$

و ماتریس و ریانس - کوواریانس آن:

$$Q_X=(A^TPA)^{-1} \tag{۵}$$

معادلهٔ (۵) همان معادلهٔ (۱) است.

با فرض $Q_X^{-1}=C_\alpha$، معادلهٔ (۵) را می‌توان بدین شکل تغییر داد:

$$A^TPA=Q_X^{-1}=C_\alpha$$

از معادلهٔ (۶) تحت شروط ۱ و ۲ می‌توان به معادلهٔ زیر رسید:

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{11} & a_{21}a_{21} & \cdots & a_{n1}a_{n1} \\ a_{12}a_{12} & a_{22}a_{22} & \cdots & a_{n2}a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11}a_{1m} & a_{21}a_{2m} & \cdots & a_{n1}a_{nm} \\ a_{12}a_{11} & a_{22}a_{21} & \cdots & a_{n2}a_{nm} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m-1}a_{1m} & a_{2m-1}a_{2m} & \cdots & a_{nm-1}a_{nm} \\ a_{1m}a_{1m} & a_{2m}a_{2m} & \cdots & a_{nm}a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ \vdots \\ P_{n-1\ n-1} \\ P_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ \vdots \\ C_{1m} \\ C_{21} \\ \vdots \\ C_{mm-1} \\ C_{mm} \end{bmatrix} \tag{۷}$$

این تساوی به صورت زیر نوشته شده:

$$HP=vecC_\alpha \quad (v')$$

در اینجا:

$$H=(A^TQA^T)$$

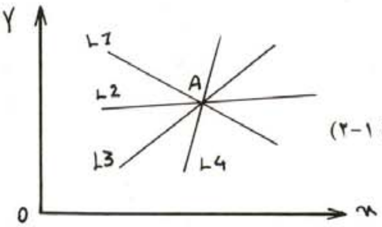
$$vecC_\alpha = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ \vdots \\ C_{1m} \\ C_{21} \\ \vdots \\ C_{mm-1} \\ C_{mm} \end{bmatrix}$$

چون ماتریس Q_X یک طرفه[۵] (Simplex) است. C_α نیز یک طرفه خواهد بود. در ترکیب مجدد معادلهٔ (V) خواهیم داشت.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{21}^2 & \cdots & a_{n1}^2 \\ a_{12}^2 & a_{22}^2 & \cdots & a_{n2}^2 \\ a_{1m}^2 & a_{2m}^2 & \cdots & a_{nm}^2 \\ \vdots & & & \\ a_{11}a_{12} & a_{21}a_{22} & \cdots & a_{n1}a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{11}a_{1m} & a_{21}a_{23} & \cdots & a_{n1}a_{nm} \\ a_{1m-1}a_{1m} & a_{2m-1}a_{2m} & \cdots & a_{nm-1}a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{22} \\ \vdots \\ P_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{22} \\ C_{mm} \\ \vdots \\ C_{12} \\ \vdots \\ C_{mm-1m} \\ C_{m-1m} \end{bmatrix} \tag{۸}$$

معادلهٔ (۸) دارای $m(m+1)/2$ معادله بوده وتعداد پارامترهای مجهول، n می‌باشد، در عملی‌ترین حالت، $m(m+1)/2>n$ است، واضح است معادلهٔ (۸) کارساز نخواهد بود. به عبارتی می‌توان چنین گفت که، از معادلهٔ (۸) با در دست داشتن P_{nn},P_{22},P_{11} می‌توان به $C_{ij}(i=1,2,...,m,j=1,2,...,m)$ رسید، اما عکس آن امکانپذیر نیست، باید توجه داشت که ناسازگاری معادلهٔ (۸) تنها به خاطر بیشتر بودن تعداد معادلات از تعداد مجهولات یعنی $m(m+1)/2>n$ نیست. دلایل دیگری وجود دارد که در زیر شرح داده شده است.

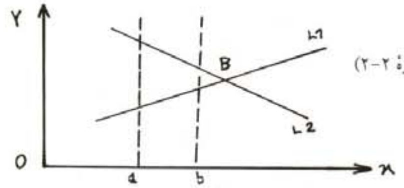
از مثال سادهٔ زیر می‌توان برای اثبات این مسئله استفاده کرد.



(نگارهٔ ۱-۲)

فرض کنید در صفحهٔ XOY (نگارهٔ ۱-۲) چهار خط داشته باشیم، با داشتن نقطهٔ A می‌توان چهار خط را از نقطهٔ A رسم کرد. اما اگر ابتدا چهار خط را رسم کنیم خیلی مشکل و حتی غیرممکن است که چهار خط متقاطع در نقطهٔ A داشته باشیم.

در نگارهٔ ۲-۲ دو خط L_1 و L_2 را داریم، که در نقطهٔ B متقاطع هستند. اگر شرط $a<x<b$ را اضافه کنیم، دیگر تقاطع در نقطهٔ B را نخواهیم داشت



(نگارهٔ ۲-۲)

در واقع، معادلهٔ (۸) درست شبیه معادلهٔ مشاهدهٔ نقشه‌برداری است. این معادله دارای خطاست چون ممکن نیست که در مشاهدات خطا نداشته باشیم.

از اثبات فوق، روشن است که علل عدم طرّاحی «ماتریس معیار مناسب» به خاطر ناسازگاری معادلهٔ (۸) است. عمل سازگارسازی معادلهٔ (۸) باعث اتلاف هزینه زیادی شده و کار عملی نیست. این مسئله علت به دست نیامدن «ماتریس معیار مناسب Q_X» در طی چنین مدت طولانی است.

«روش ارائه شده»

در هر یک از موارد نقشه‌برداری، تنها بخشهایی از عناصر ماتریس واریانس - کوواریانس Q_X مورد نیاز است. بعضی از این عناصر مهم، و برخی فاقد اهمیت هستند. در اینجا لغت «مهم» بدین صورت است که مقدار آن عنصر نباید تغییر کرده یا بزرگتر از مقدار معینی شود. بنابراین، برحسب «اهمیت» آنها را می‌توان به گروههای متعدد تقسیم کرد:

گروه اول: عناصری که به هیچ وجه نباید عوض شوند.

گروه دوم: عناصری که نباید خیلی تغییر کنند.

گروه آخر: عناصری که می‌توانند هر مقداری باشند.

برحسب هدف شبکهٔ نقشه‌برداری، می‌توان گروه‌های فوق را تعیین کرد.

در عمل، Q_X را داریم، نه C_α، بنابراین معادلهٔ (۷) باید بدین صورت تغییر یابد:

$$(A^TPA)^{-1}(A^TPA)=QXQX^{-1}QX=QX$$

و سپس

$$((A^TPA)^{-1}A^T)P(A(A^TPA)^{-1})=Q \qquad (۹)$$

با فرض $B=A(A^TPA)^{-1}$ معادلهٔ (۹) به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$B^TPB=Q_X \qquad (۹')$$

حال «معادلهٔ مشاهده» زیر را داریم که همان (۹') است.

$$\begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{21}^2 & \cdots & b_{n1}^2 \\ b_{12}^2 & b_{22}^2 & \cdots & b_{n2}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1m}^2 & b_{2m}^2 & \cdots & b_{nm}^2 \\ b_{11}b_{12} & b_{21}b_{22} & \cdots & b_{n1}b_{n2} \\ b_{11}b_{1m} & b_{21}.b_{2m} & \cdots & b_{n1}b_{nm} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1m-1}b_{1m} & b_{2m-1}b_{2m} & \cdots & b_{nm-1}b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{22} \\ \vdots \\ P_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ \vdots \\ Q_{mm} \\ Q_{12} \\ \vdots \\ Q_{1m} \\ Q_{m-1m} \end{pmatrix}$$

یا:

$$(B^TQB^T)P = vecQ_x$$

لازم به توجه است که $(B^T\ominus B^T)$ و $vecQ_X$ علائمی هستند که تنها دلالت بر مقادیر فوق دارند، و از علائم ریاضی نیستند.

معادلهٔ باقیمانده‌ها عبارتست از:

$$(۹'')$$

$$V'= \begin{pmatrix} V_{Q11} \\ V_{Q22} \\ \vdots \\ V_{mm} \\ \vdots \\ V_{Qm-1m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{21}^2 & \cdots & b_{n1}^2 \\ b_{12}^2 & b_{22}^2 & \cdots & b_{n2}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1m}^2 & b_{2m}^2 & \cdots & b_{nm}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1m-1}b_{1m} & b_{2m-1}b_{2m} & \cdots & b_{nm-1}b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{22} \\ \vdots \\ P_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{mm} \\ \vdots \\ Q_mQ_{1m} \end{pmatrix}$$

تابعی که باید می‌نیمم شود عبارت‌است‌از:

$$V^{T}PV = \min \qquad (۱۰)$$

باشروط ۱ و ۲.

در اینجا:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & & 0 \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_{m(m+1)/2} \end{bmatrix}$$

در مقایسه با سرشکنی کمترین مربّعات، تشابهات زیادی بین این دو وجود دارد. (جداول زیر را ملاحظه فرمایید).

کمترین‌مربّعات	روش‌جدید	تشابهات
V	V'	باقیمانده‌ها
X	P^{*}	پارامترهای مجهولی
A	$B^{T}.\ B^{T}$	ماتریس‌ضرائب
L	$vecQ_{\alpha}$	مشاهدات
$v^{T}pv=min$	$v'^{T}p'v'=min$	تابعی که می‌بایست‌می‌نیمم شود

جدول ۱-۳

کمترین‌مربّعات	روش‌جدید	تفاوتها
ثابت	متغیر	ماتریس‌ضرائب
تساوی	نامساوی	شروط

جدول ۲-۳

در بهینه‌سازی، مجاز به داشتن دو معادلهٔ می‌نیمم شونده، به طور هم‌زمان نیستیم.

بنابراین، تابع می‌نیمم شوندهٔ min = امکانات را باید به شرط تبدیل کرد. مثلاً در مورد $F_{(p)}$ = امکانات، شرط زیر را خواهیم داشت:

$$F_{(p)} = W \qquad W > 0 \qquad (۱۱)$$

در اینجا W مقدار ثابتی است، برحسب شرایط عملی، مقدار W و فرم خاص آن $F_{(p)}$ را می‌توان تعیین کرد. مقدار W حتی می‌تواند تغییر یابد. در نتیجه، با امکانات مختلف طرّاحی‌های مختلف خواهیم داشت. با استفاده از این روش، می‌توان طرح مناسبتر را برگزید.

چون ماتریس ضرائب $_{B}T_{\Theta B}T$ متغیری حاوی P است، لازم است در این محاسبه از روش تکرار استفاده شود.

مراحل محاسبه به صورت زیر است:

۱- به P مقداری داده و $_{B}T_{\Theta B}T$ را حساب می‌کنیم.

۲- تحت شروط ۱ و ۲ و (۱۱) با استفاده از تابع (۱۰) P محاسبه می‌شود.

۳- P را با مقدار قبلی آن مقایسه کرده، در صورت رضایت‌بخش بودن P را با مقدار قبلی آن مقایسه کرده، در صورت رضایت‌بخش بودن P، محاسبات متوقف شده، در غیر این‌صورت، به مرحله ۱ بازمی‌گردیم.

نتیجه:

در سرشکنی ذکر شده، بخاطر وجود ناسازگاری داخلی در معادلهٔ (۸)، سعی در طرّاحی «ماتریس معیار مناسب» Q_X یا C_X غیرعملی است. روش ارائه شده از دادن «ماتریس معیار مناسب» اجتناب کرده، و در عوض، P اولیه برحسب دسته‌بندی عناصر شبکه تعیین می‌کند. این روش می‌تواند پاسخگوی نیازهای مربوط به طرّاحی شبکه‌های نقشه‌برداری در شرایط مختلف بوده و در عین حال عملی است. روش محاسبات در مقالهٔ ۵ (در قسمت منابع) شرح داده شده است.

منابع:

1 - Grafarand, E.W. 1974. «Optimization of Geodetic Networks», The Canadian Surveyor, 28(5), December 1974, PP. 716 - 723.

2 - Baarda, W. 1973. «S-translations and Criterion Matrices.» Neth. Geod, Comm., Pub. on Geod., New Series 5,no1, Delf (1973).

3 - Wimmer, H. 1981, «Second order Design of Geodetic Criterion Matrix.» Paper Presented at the Symposium on Geodetic Computations, Munich, August 31-- September 5, 1981.

4 - Anderson, E.G. 1982. «Towards total Optimization of surveying and mapping systems.» Paper presented at the Symposium on Survey Control Networks, Aalborg University center, Denmark, July 1982.

5 - Zhang Bingcai. 1987. «Quadratic Discrete Optimization.» Technical Papers, 1987. ASPRS - ACSM Annual Convention, volume 3, PP.52-60.

---

۱) از: گروه نقشه‌برداری دانشگاه مهندسی ساختمان و معماری Nanjing چین، و HE PING مرکز سنجش از دور دانشگاه Wisconsin-Madison امریکا.

۲ و ۳) توضیح مترجم:

نویسندهٔ چینی مقاله تنها به ذکر مثالهایی از کشور چین اکتفا کرده است.

۴) توضیح مترجم: دو نماد فوق نمادهایی هستند که برای نمایش تساوی (v') تعریف شده و فاقد مفاهیم استاندارد ریاضی هستند.

۵) توضیح مترجم: یک طرفه بودن Q_x بدین صورت است که هر مختصّاتی دارای ماتریس واریانس کوواریانس خاصّ خود است، اما یک ماتریس واریانس -کوواریانس خاصّ مختصّات واحدی نیست.